

EINDTENTAMEN Speciale Relativiteitstheorie 2014 - NS106B

Woensdag, 5 November 2014, 13:30-16:30, Olympos Hal 2.

- 1) Schrijf je naam en studentnummer op elk oplossingsblad. Begin elke opgave op een nieuw blad. Bij het inleveren moet je elke opgave op een aparte stapel leggen!
- 2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed en leg je redenering goed uit.
- 3) Er zijn drie opgaven. Het resultaat telt mee voor 70% van het eindcijfer.
- 4) Het gebruik van het dictaat, boeken, rekenmachines, e.d., is niet toegestaan.

Formularium

Bij deze opgaven veronderstellen we steeds twee inertiaalwaarnemers O en O' met gesynchroniseerde klokken. Waarnemer O' beweegt met constante snelheid \vec{v} ten opzichte van O . Zoals steeds is c de lichtsnelheid, afgerond $c = 3 \times 10^8$ m/s.

- De speciale Lorentz-transformaties in één dimensie zijn

$$x' = \gamma(x - vt) ; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) , \quad (1)$$

waarbij

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \quad \beta \equiv \frac{v}{c} . \quad (2)$$

De transformatie van de snelheid van een deeltje is dan

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} , \quad (3)$$

waarbij u de snelheid van het deeltje is t.o.v. O , en u' t.o.v. O' . In bovenstaande formule zijn u en v positief gekozen en beweegt het deeltje in dezelfde richting als O' .

- De energie en het impuls van een deeltje met massa m en snelheid \vec{u} zijn gegeven door $E = mc^2\gamma_u$ en $\vec{p} = m\vec{u}\gamma_u$, waarbij $\gamma_u^{-2} = 1 - u^2/c^2$. Er geldt de relatie $E^2 = \vec{p}^2c^2 + E_0^2$, waarbij $E_0 = mc^2$ de rustenergie is. Voor massalozes deeltjes, zoals fotonen, gelden er de relaties $E = pc = hf$, met h de constante van Planck, en f de frequentie behorende bij het deeltje.

1. Lichtflitsen (3 punten)

In een inertiaalsysteem O worden in de plaatsen X en Y lichtflitsen uitgezonden, eerst in X (gebeurtenis 1), en 1 microseconde (1×10^{-6} s) later in Y (gebeurtenis 2). De afstand tussen de plaatsen X en Y bedraagt 500 meter. Een waarnemer O' beweegt nu ten opzichte van O met snelheid v , parallel aan de lijn XY . In het stelsel O' zijn de twee gebeurtenissen gelijktijdig.

- Teken de ruimtetijd diagrammen van zowel O en O' met de twee gebeurtenissen die daarin plaatsvinden (hoeft niet op schaal). Teken ook het ruimtetijd diagram van O' in dat van O .
- Hoe groot moet v zijn opdat de gebeurtenissen in het O' stelsel gelijktijdig plaatsvinden?
- Wat is de afstand tussen X en Y volgens O' ?

2. Een bewegende staaf (3 punten)

Een staaf ligt in de lengte van de x -as en beweegt in deze richting met constante snelheid v ten opzichte van een waarnemer O . De rustlengte van de staaf is $2L_0$, gemeten in het ruststelsel O' van de staaf. Op tijdstip $t = 0$ is het middelpunt van de staaf gepositioneerd op $x = 0$.

Beschouw nu een cirkelvormige ring met straal L_0 in rust. In het stelsel van O beweegt de ring met constante snelheid in de z -richting. Het oppervlak opgespannen door de ring is steeds parallel aan het (x, y) -vlak en op $t = 0$ is het middelpunt van ring in de oorsprong in het (x, y) -vlak bij $z = 0$.

- Wat is de lengte van de staaf gemeten in het O -stelsel? Teken in een diagram de staaf en de ring in het (x, y) -vlak op tijdstip $t = 0$. Past de staaf in de ring?
- Bepaal wanneer de ring de x' -as snijdt volgens de waarnemer in het ruststelsel van de staaf O' .
- Maak een tekening van de ring en staaf, gezien vanuit de z' -as ("bovenaanzicht"). Hou hierbij rekening met de Lorentz contractie die O' waarneemt. Beschrijf wat er gebeurt volgens een waarnemer in het ruststelsel O' en leg uit hoe en waarom de staaf binnen de ring past, of niet.

3. Botsingen van elektronen en positronen (4 punten)

Een elektron, e^- , botst in het laboratoriumstelsel O met snelheid $u = 4c/5$ op een positron in rust t.o.v. O . Een positron, e^+ , is het anti-deeltje van het elektron, en heeft dezelfde massa maar tegengestelde elektrische lading.

- a) Bereken de totale energie in het laboratoriumstelsel O , uitgedrukt in de elektron-massa m_e en c .

Beschouw nu het zwaartepuntstelsel, O' , waarin de totale impuls - per definitie - gelijk is aan nul.

- b) Toon aan dat de snelheid u' van het elektron in het stelsel O' gelijk is aan $u' = c/2$. Gebruik daarbij de transformatie van snelheden.
- c) Bereken de totale energie in het zwaartepuntstelsel O' , uitgedrukt in de elektron-massa m_e en c .

Bij de botsing van e^+ en e^- vernietigen zij elkaar en ontstaan er twee fotonen (licht-deeltjes).

- d) Toon aan dat in O' de frequenties van beide fotonen gelijk moeten zijn. Geef een uitdrukking voor de frequentie in termen van m_e, c , en de constante van Planck h .
- e) Waarom moeten er in het algemeen minstens *twee* fotonen ontstaan?

