DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE
UNIVERSITEIT UTRECHT

EINDTENTAMEN Speciale Relativiteitstheorie 2012 - NS106B

Woensdag, 7 November 2012, 15:00-18:00, Kantine Minnaertgebouw+BBL065.

1) Schrijf je naam en studentennummer op elk oplossingsblad. Begin elke opgave op een nieuw blad.

2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed en leg je redenering goed uit.

3) Er zijn drie opgaven. Het resultaat telt mee voor 85% van het eindcijfer.

4) Het gebruik van het dictaat, boeken, rekenmachines, e.d., is niet toegestaan.

Formularium

Bij deze opgaven veronderstellen we steeds twee inertiaalwaarnemers O en O' met gesynchroniseerde klokken. Waarnemer O' beweegt met constante snelheid $\vec{v}$ ten opzichte van O. Zoals steeds is c de lichtsnelheid, afgerond $c = 3 \times 10^5\ km/s$. Een lichtjaar is de afstand die het licht aflegt in 1 jaar.

- De speciale Lorentz transformaties in één dimensie zijn

$$x' = \gamma(x - vt) \ ; \qquad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \ , \tag{1}$$

waarbij

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \qquad \beta \equiv \frac{v}{c} \ . \tag{2}$$

De transformatie van de snelheid van een deeltje is dan

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \ , \tag{3}$$

waarbij u de snelheid van het deeltje is t.o.v. O, en u' t.o.v. O'. In bovenstaande formule zijn alle snelheden positief en beweegt het deeltje in dezelfde richting beweegt als O'.

- Het relativistische Doppler effect voor lichtgolven die zich voortbewegen in in één dimensie wordt gegeven door de formules

$$\lambda' = \lambda\, k(\beta)\ , \qquad k(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\ , \tag{4}$$

waarbij λ de golflengte is die de bron uitstuurt, en λ' de golflengte gemeten door een waarnemer die van de bron weg beweegt met snelheidsfactor β.

- De energie en het impuls van een deeltje met massa m en snelheid v zijn gegeven door $E = mc^2\gamma$ en $p = mv\gamma$ (waarbij p en v de groottes van de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{v}$ zijn). Voor massaloze deeltjes, zoals fotonen, gelden er de relaties $E = pc = hf$, met h de constante van Planck, en f de frequentie behorende bij het deeltje.

1. Lichtflitsen (3 punten)

In een inertiaalsysteem O worden in de plaatsen X en Y lichtflitsen uitgezonden, eerst in X (gebeurtenis 1), en 1 microseconde (1×10^{-6} s) later in Y (gebeurtenis 2). De afstand tussen plaatsen X en Y bedraagt 500 meter. Een waarnemer O' beweegt nu ten opzichte van O met snelheid v, parallel aan de lijn XY, en ziet de twee gebeurtenissen gelijktijdig.

a) Teken de ruimte-tijd diagrammen van O en O' waarin de twee gebeurtenissen plaatsvinden (hoeft niet op schaal).

b) Hoe groot moet v zijn opdat O' de gebeurtenissen gelijktijdig ziet ? $\frac{9}{5} \cdot 10^8$ m/s

c) Wat is de afstand tussen X en Y volgens O' ? 400

2. Roodverschuiving (3 punten)

In het uitdijend heelal verwijderen veraf gelegen sterrenstelsels en quasars zich van ons af met een snelheid u die toeneemt met hun afstand d, via de wet van Hubble:

$$u = H\, d\ , \tag{5}$$

waarbij H de Hubble constante is. Deze verwijdering valt te bepalen uit de roodverschuiving van het uitgestuurde licht via het Doppler-effect. De roodverschuiving wordt gedefinieerd aan de hand van de parameter

$$z \equiv \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}\ . \tag{6}$$

a) Toon aan dat uit het relativistische Doppler-effect volgt

$$z = k(\beta_u) - 1 \qquad \text{en} \qquad \beta_u = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2} \, . \tag{7}$$

Schets een grafiek van z tegen $\beta_u \equiv u/c$.

b) Uit metingen en observaties blijkt dat voor quasars op een afstand van 10^{10} lichtjaar, we een roodverschuiving van $z = 1$ vinden. Bereken hieruit de Hubble-constante. Laat zien dat $\frac{1}{H}$ van de orde van de ouderdom van het heelal is (13,7 miljard jaar).

c) Beschouw nu een tweede inertiaalwaarnemer, O', die beweegt ten opzichte van ons met snelheid v in de richting van de quasar, met $v < u$. O' noteert de snelheid van de quasar met u', en de roodverschuiving met z'. Toon aan dat

$$z' = \frac{k(\beta_u)}{k(\beta_v)} - 1 \, , \tag{8}$$

en leg uit waarom $z' < z$.

3. Botsingen van elektronen en positronen (4 punten)

Een elektron, e^-, botst in het laboratoriumstelsel O met snelheid $u = 0,8c$ op een positron in rust t.o.v. O. Een positron, e^+, is het anti-deeltje van het elektron, en heeft dezelfde massa maar tegengestelde elektrische lading.

a) Bereken de totale energie in het laboratoriumstelsel O, uitgedrukt in de elektron massa m_e en c. $\frac{8}{3} m_e c^2$

Beschouw nu het zwaartepuntstelsel, O', waarin de totale impuls gelijk is aan nul.

b) Toon aan dat de snelheid u' van het elektron in het stelsel O' gelijk is aan $u' = 0,5c$. Gebruik daarbij de transformatie van snelheden. $\frac{10}{17}c$?... $v = \frac{2}{3}c$?

c) Bereken de totale energie in het zwaartepuntstelsel O', uitgedrukt in de elektron massa m_e en c . $\frac{4}{\sqrt{3}} m_e c^2$

Bij de botsing van e^+ en e^- vernietigen zij elkaar en ontstaan er twee fotonen (licht-deeltjes).

d) Toon aan dat in O' de frequenties van beide fotonen gelijk moeten zijn. Geef een uitdrukking voor de frequentie in termen van m_e, c, en de constante van Planck h. $f = \frac{2 m_e c^2}{\sqrt{3} h}$

e) Waarom moeten er in het algemeen minstens *twee* fotonen ontstaan?