Tentamen *Elektromagnetisme* (NS-103B)

woensdag 21 april 2010

15:00–18:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van onderstaande algemene gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\boldsymbol{F}^{\text{el}}_{Q,\boldsymbol{R}\to q,\boldsymbol{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\boldsymbol{F}^{\text{mag}}_{P,\boldsymbol{R}\to p,\boldsymbol{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \frac{Q_{\text{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

$$\oint \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0\,I_{\text{omvat}} \qquad \text{(wet van Ampère)}$$

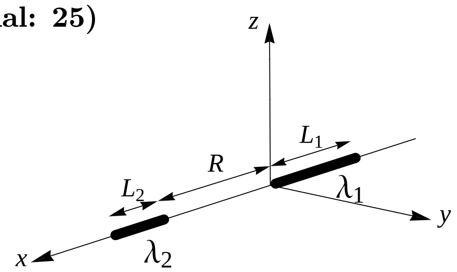
$$\boldsymbol{E}^{Q,\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{op } q \text{ in } \boldsymbol{r}} = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(kracht op puntlading in extern veld)}$$

- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\boldsymbol{\nu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\boldsymbol{\nu}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$.

1 De kracht tussen twee geladen staafjes

a: 4 b: 8 c: 8 d: 5 (totaal: 25)



Twee homogeen geladen staafjes liggen vast op de x-as. Staafje 1 ligt tussen $x = -L_1$ en $x = 0$; staafje 2 ligt tussen $x = R$ en $x = R + L_2$. De lijnladingsdichtheden van de staafjes zijn λ_1 resp. λ_2. In deze opgave gaan we de elektrische kracht tussen de staafjes bepalen.

We beginnen met een schatting van de kracht voor het geval de staafjes ver van elkaar verwijderd zijn ($R \gg L_1, L_2$).

a. Leg uit (zonder ingewikkelde berekeningen) dat voor $R \gg L_1, L_2$ de kracht van staafje 1 op staafje 2 ongeveer gegeven wordt door:

$$\boldsymbol{F}_{1\to 2} \simeq \frac{L_1\, L_2 \lambda_1\, \lambda_2}{4\pi\epsilon_0\, R^2}\, \hat{\boldsymbol{x}} \tag{1}$$

We gaan nu over tot de exacte bepaling van de kracht van staafje 1 op staafje 2. Als tussenstap bepalen we eerst het elektrische veld ten gevolge van staafje 1.

b. Toon aan dat geldt voor het elektrische veld $\boldsymbol{E}_1$ ten gevolge van staafje 1 in een punt $(x_0, 0, 0)$ op de positieve x-as ($x_0 > 0$):

$$\boldsymbol{E}_1(x_0, 0, 0) = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{L_1 + x_0} \right) \hat{\boldsymbol{x}}$$

c. Toon aan dat geldt voor de kracht $\boldsymbol{F}_{1\to 2}$ van staafje 1 op staafje 2:

$$\boldsymbol{F}_{1\to 2} = \frac{\lambda_1\, \lambda_2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \ln\left(1 + \frac{L_2}{R}\right) - \ln\left(1 + \frac{L_2}{R+L_1}\right) \right\} \hat{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

In onderdeel d) gaat u aantonen dat uit (2) volgt:

$$\boldsymbol{F}_{1\to 2} = \\ = \frac{\lambda_1\, \lambda_2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{L_1}{R} \frac{L_2}{R} + \text{termen met minstens drie producten van } \frac{L_1}{R} \text{ en/of } \frac{L_2}{R} \right\} \hat{\boldsymbol{x}} \tag{3}$$

Hieruit zien we dat voor $R \gg L_1, L_2$ de exacte uitdrukking (2) inderdaad in goede benadering gegeven wordt door (1).

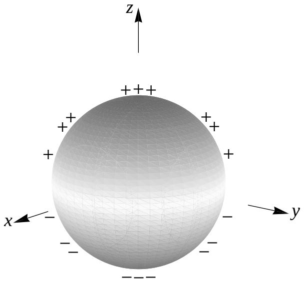
d. Toon (3) aan.
<u>Gegevens</u>: U mag zonder bewijs gebruik maken van de volgende taylorontwikkelingen:

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \text{termen } x^3 \text{ en hoger}$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \text{termen } x^3 \text{ en hoger}$$

2 Een geleidende bol en een bolmagneet

a: 6 b: 6 c: 3 d: 6 e: 3 f: 6 (totaal: 30)

In onderstaande tabel zijn de elektrische velden beschreven behorend bij twee ladingsverdelingen op een boloppervlak met straal R en middelpunt in de oorsprong. De ene ladingsverdeling is homogeen, met oppervlakteladingsdichtheid σ_0.



De andere ladingsverdeling is inhomogeen, met oppervlakteladingsdichtheid $\sigma_0 \cos\vartheta$. Hierbij is ϑ zoals gebruikelijk de hoek met de positieve z-as ($\cos\vartheta = \frac{z}{R}$). In de figuur is de ladingsdichtheid weergegeven door de zwartingsgraad. Op de bovenste helft van het boloppervlak is de lading positief, hoe donkerder hoe meer positief; op de onderste helft van het boloppervlak is de lading negatief, hoe donkerder hoe meer negatief.

σ_0	$\sigma_0 \cos\vartheta \;=\; \frac{\sigma_0}{R}\, z$
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \;=\; \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{binnen} \\ \dfrac{Q\,\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\epsilon_0\, r^2} & \text{buiten} \end{cases}$ waarbij $Q \;=\; 4\pi\, R^2\, \sigma_0$	$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{z}} & \text{binnen} \\ \dfrac{3\,(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{r}} \;-\; \boldsymbol{p}}{4\pi\epsilon_0\, r^3} & \text{buiten} \end{cases}$ waarbij $\boldsymbol{p} \;=\; \frac{4}{3}\pi R^3\, \sigma_0\, \hat{\boldsymbol{z}}$
Binnen het boloppervlak *nul*. Buiten het boloppervlak gelijk aan het veld van een *puntlading* Q in het middelpunt.	Binnen het boloppervlak *homogeen*. Buiten het boloppervlak gelijk aan het veld van een *dipool* in het middelpunt, met elektrisch moment $\boldsymbol{p}$.

In het vervolg van deze opgave mag u zonder bewijs gebruik maken van de gegevens in de tabel, die we gaan toepassen op twee heel verschillende situaties:

- een geleidende bol in een homogeen elektrisch veld;
- een homogeen gemagnetiseerde bolmagneet.

Een geleidende bol in een homogeen elektrisch veld

Wanneer een drie-dimensionale geleider in een uitwendig elektrostatisch veld gebracht wordt (dus in een veld dat veroorzaakt wordt door stilstaande ladingen buiten de geleider), zal de lading in de geleider zich razendsnel herverdelen, totdat het *totale* elektrische veld *in* de geleider overal nul is en *aan de rand* van de geleider overal loodrecht op de rand staat. Vanaf dat moment beweegt nergens in de geleider nog lading. We beschouwen de ladingsverdeling in deze *statische* situatie.

a. Leg uit, met de wet van Gauss, dat een drie-dimensionale geleider in de statische situatie alleen netto lading op de randen kan hebben. Leg dus uit:

   (i) dat uit de wet van Gauss volgt dat in het binnenste van de geleider dan nergens netto lading zit;

   (ii) dat de wet van Gauss toelaat dat op de randen van de geleider wel netto lading zit.

Beschouw nu een *neutrale* geleidende massieve bol (de totale lading op de bol is dus 0). De bol wordt in een gebied gebracht waar een homogeen elektrisch veld $\boldsymbol{E}_0$ heerst dat wijst in de positieve z-richting en waarvan de grootte E_0 is:

$$\boldsymbol{E}_0 \;=\; E_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

De lading op de bol gaat zich herverdelen.

b. Maak aannemelijk dat we in de statische situatie te maken hebben met een ladingverdeling over de rand van de bol, met oppervlakteladingsdichtheid $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos\vartheta$.

c. Geef een uitdrukking voor het totale elektrische veld overal buiten de bol.

Dit keer brengen we niet een neutrale maar een *geladen* geleidende massieve bol, met totale lading q, in het gebied waar het homogene veld $\boldsymbol{E}_0$ heerst.

d. Geef ook voor dit geval:

   (i) de ladingsverdeling op de bol;

   (ii) het totale elektrische veld overal buiten de bol.

   Licht uw antwoorden kort toe.

Een homogeen gemagnetiseerde bolmagneet

Beschouw nu een bolmagneet, die homogeen gemagnetiseerd is in de positieve z-richting met sterkte ν_0. De volumedipooldichtheid $\boldsymbol{\nu}_0$ van de magneet is dus:

$$\boldsymbol{\nu}_0 \;=\; \nu_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

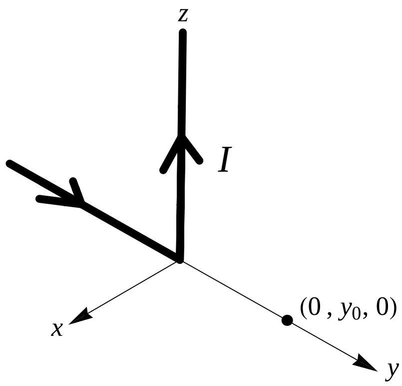
e. Toon aan dat de equivalente *pool*verdeling van $\boldsymbol{\nu}_0$ bestaat uit een poolverdeling over het boloppervlak met dichtheid $\nu_0 \cos\vartheta$.

f. Geef het magnetische veld buiten de bolmagneet, en ga na dat dit gelijk is aan het veld van een magnetische dipool in het middelpunt, met als magnetisch moment het totale magnetische moment van de bolmagneet.

3 Een stroomdraad met een knik

a: 15 b: 10 c: 10 (totaal: 35)

Een oneindig lange stroomdraad is in een knik gelegd en voert in de aangegeven richting een stroom I. We kiezen het assenstelsel zodanig dat de draad ligt op de negatieve y-as en de positieve z-as. In deze opgave gaan we het magnetische veld ten gevolge van deze stroomdraad bepalen in een punt $(0, y_0, 0)$ op de positieve y-as ($y_0 > 0$).

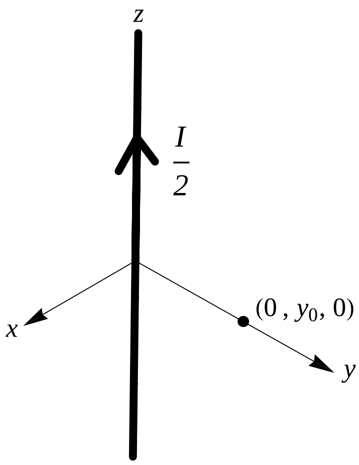


a. Toon aan, met behulp van de wet van Biot-Savart en superpositie (integratie over de stroomdraad):

$$\boldsymbol{B}(0, y_0, 0) \;=\; -\frac{\mu_0\, I}{4\pi\, y_0}\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

Gegeven: Een primitieve (naar u) van $\dfrac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$.

Het magnetische veld op de positieve y-as kan ook met minder rekenwerk bepaald worden. Zo geldt dat in het punt $(0, y_0, 0)$ op de positieve y-as het magnetische veld ten gevolge van de stroomdraad met een knik hetzelfde is als het magnetische veld van een oneindig lange stroomdraad langs de z-as die in de richting van de positieve z-as een stroom $\frac{1}{2}I$ voert.



b. Leg uit, op basis van symmetrie-overwegingen en het superpositiebeginsel, dat het magnetische veld van de draad met een knik (stroom I) in $(0, y_0, 0)$ hetzelfde is als het veld van de rechte stroomdraad langs de z-as (stroom $\frac{1}{2}I$).
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

Het magnetische veld van de rechte stroomdraad langs de z-as (stroom $\frac{1}{2}I$) kan bepaald worden zonder gebruik te maken van de wet van Biot-Savart.

c. Bepaal met behulp van de wet van Ampère en symmetrie-overwegingen het magnetische veld in het punt $(0, y_0, 0)$ ten gevolge van de rechte stroomdraad langs de z-as (stroom $\frac{1}{2}I$), en ga na dat op deze manier inderdaad hetzelfde resultaat gevonden wordt als bij onderdeel a).
Let op: Geef steeds weer precies aan welke symmetrieregels u gebruikt in uw redenering.