

1a) Voor $R \gg L_1, L_2$ kunnen de staven gezien worden als puntladingen.
 Hiervoor geldt de wet van Coulomb:

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{q_1 q_2 (\vec{r} - \vec{R})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{R}|^3}$$

Hierin is :

$$(\vec{r} - \vec{R}) = R \hat{x}$$

$$q = \lambda_1 L_1$$

$$Q = \lambda_2 L_2$$

Dus :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \approx \frac{L_1 L_2 \lambda_1 \lambda_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

b) Voor het elektrisch veld van een lijnstukje dx gelegen in punt $(x, 0, 0)$ geldt de wet van Coulomb:

$$d\vec{E}_1(x_0, 0, 0) = \frac{\lambda_1 dx}{4\pi\epsilon_0 (x - x_0)^2} \hat{x}$$

Dit moeten we integreren over lijnstuk 1 :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(x_0, 0, 0) &= \int_{-L_1}^0 d\vec{E}_1 \\ &= \frac{\lambda_1 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_1}^0 \frac{dx}{(x - x_0)^2} = \frac{\lambda_1 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{x - x_0} \right]_{-L_1}^0 \\ &= \frac{\lambda_1 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{L_1 + x_0} \right) \end{aligned}$$

c) Een lijnstukje dx gelegen in $(x, 0, 0)$ heeft een lading $\lambda_2 dx$ en ondervindt een kracht

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{E}_1(x, 0, 0) \lambda_2 dx$$

in het veld van lijnlading 1.

De totale kracht die lijnlading 2 ondervindt is dan :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \lambda_2 \int_{-L_1}^{R+L_2} \vec{E}_1(x, 0, 0) dx \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_1}^{R+L_2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L_1 + x} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln x - \ln(L_1 + x) \right]_{R}^{R+L_2}$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \left(1 + \frac{L_2}{R} \right) - \ln \left(1 + \frac{L_2}{R+L_1} \right) \right)$$

d) $\frac{L_1}{R}$ en $\frac{L_2}{R}$ zijn $\ll 1$. Voor de eerste term in (2) kunnen we meteen benaderen met:

$$(*) \quad \ln \left(1 + \frac{L_2}{R} \right) = \frac{L_2}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{L_2}{R} \right)^2 + \text{termen } \left(\frac{L_2}{R} \right)^3 \text{ en hoger.}$$

Voor de tweede term schrijven we eerst:

$$\frac{L_2}{R+L_1} = \frac{L_2}{R} \left(\frac{1}{1+L_1/R} \right)$$

$$= \frac{L_2}{R} \left(1 - \frac{L_1}{R} + \left(\frac{L_1}{R} \right)^2 + \text{termen } \left(\frac{L_1}{R} \right)^3 \text{ en hoger} \right)$$

$$= \frac{L_2}{R} - \frac{L_1 L_2}{R^2} + \text{termen met drie factoren of meer}$$

Hiermee vinden we

$$(**) \quad \ln \left(1 + \frac{L_2}{R+L_1} \right) = \frac{L_2}{R} - \frac{L_1 L_2}{R^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{L_2}{R} - \frac{L_1 L_2}{R^2} \right)^2 + \text{termen met drie factoren}$$

$$= \frac{L_2}{R} - \frac{L_1 L_2}{R^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{L_2}{R} \right)^2 + \text{termen met drie factoren.}$$

Nu zijn we klaar om (*) en (**) in (2) te substitueren:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \cancel{\frac{L_2}{R}} - \frac{1}{2} \left(\cancel{\frac{L_2}{R}} \right)^2 - \cancel{\frac{L_2}{R}} + \frac{L_1 L_2}{R^2} + \frac{1}{2} \left(\cancel{\frac{L_2}{R}} \right)^2 + \text{termen drie fact.} \right\}$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{L_1 L_2}{R^2} + \text{termen met drie factoren of meer} \right\}$$

2 a)

(i) Neem een willekeurig gevormde (massieve) geleider en kies een willekeurig Gauss-oppervlak dat geheel binnen de geleider ligt. (*) Voor dit Gauss-oppervlak geldt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{omst}}}{\epsilon_0}$$

Omdat per definitie in een geleider $\vec{E} = \vec{0}$, is het linkerlid nul. (*) Er volgt dat de netto omsloten lading $Q_{\text{omst}} = 0$. (i) Omdat het gekozen oppervlak willekeurig is, moet Q_{omst} overal nul zijn. (i)

(ii) Een Gauss-oppervlak dat gedeeltelijk buiten de geleider ligt kan (*) netto lading omsluiten, omdat voor het gedeelte dat erbuiten ligt

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} \neq 0 \quad (i)$$

b) Binnen de geleider geldt nog steeds $\vec{E} = \vec{0}$. Op het oppervlak van de bol ontstaat dus een ladingsverdeling die het externe veld precies opheft: $\vec{E}_{\text{geleider binnen}} = -\vec{E}_0$. (3) Dit is een homogeen veld. (i) Een blik in de tabel leert dat zo'n homogeen veld in een bolvormig volume precies wordt opgewekt door de ladingsverdeling $\sigma_0 \cos \theta$. (i) Om precies te zijn is de veldsterkte dan $-\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$. Aangenomen dit gelijk moet zijn aan $-E_0$ geldt $\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0$. (i) De ladingsverdeling is dan

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

3 c.) Buiten de bol is het elektrische veld een superpositie ⁽¹⁾ van het externe veld ⁽¹⁾ en de ladingsverdeling $3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$ ⁽¹⁾ op het boloppervlak:

$$\vec{E}_{\text{buiten}} = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

d.) Ook nu geldt weer dat binnen de bol $\vec{E} = \vec{0}$ moet zijn en dat alle lading op het boloppervlak moet zitten. Bovendien geldt weer superpositie.

3 (i) De extra lading q verdeelt zich homogeen over het boloppervlak. ⁽¹⁾ De bijdrage aan \vec{E} binnen de bol is dan immers nul ⁽¹⁾, dus

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} + 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta \quad (1)$$

3 (ii) Superpositie geeft weer:

$$\vec{E}_{\text{buiten}} = \frac{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}{\quad} + \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

e.) De equivalente poolverdeling is een superpositie van:

3 A) een volumedipoolverdeling $-\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_0 = -V_0 \vec{\nabla} \cdot \hat{z} = 0$ ⁽¹⁾
 en (of door analogie met ladingsverdeling)

B) een oppervlaktepoolverdeling $\vec{V}_0 \cdot \hat{n}$ ⁽¹⁾

Duidelijk is dat $\hat{n} = \hat{r}$ voor een bol, dus

$$\vec{V}_0 \cdot \hat{n} = V_0 \hat{z} \cdot \hat{r} = V_0 \cos\theta \quad (1), \text{ want } \theta \text{ is } \theta$$

de poolhoek, d.w.z. de hoek die \vec{r} met de z -as maakt.

f.) Volgens de wet van Coulomb voor puntpolen is het magnetisch veld van een poolverdeling gelijk

aan het elektrische veld van dezelfde ladingsverdeling waarbij de oppervlakte lading dichtheid σ is vervangen door de opp.-pooldichtheid V_0 en ϵ_0 door $\frac{\mu_0}{4\pi}$.
 Uit tabel lezen we:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}) \quad (4) \text{ met } \vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 V_0 \hat{z} \quad (2)$$

3a) Biot-Savart:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$

Gebruik superpositie van twee stukken:

Stuk I: $(-\infty \hat{y}, 0 \hat{y}) \rightarrow d\vec{r} = \hat{y} dy$; $\vec{r}_0 = y_0 \hat{y}$; $\vec{r} = y \hat{y}$

Maar $d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \hat{y} dy \times (y_0 - y) \hat{y}$
 $= dy (y_0 - y) \hat{y} \times \hat{y} = 0$ (geen bijdrage)

Stuk II: $(0 \hat{z}, \infty \hat{z}) \rightarrow d\vec{r} = \hat{z} dz$; $\vec{r}_0 = y_0 \hat{y}$; $\vec{r} = z \hat{z}$

Nu is $d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \hat{z} dz \times (y_0 \hat{y} - z \hat{z})$
 $= y_0 dz (\hat{z} \times \hat{y}) - z dz (\hat{z} \times \hat{z})$
 $= -y_0 dz \hat{x}$

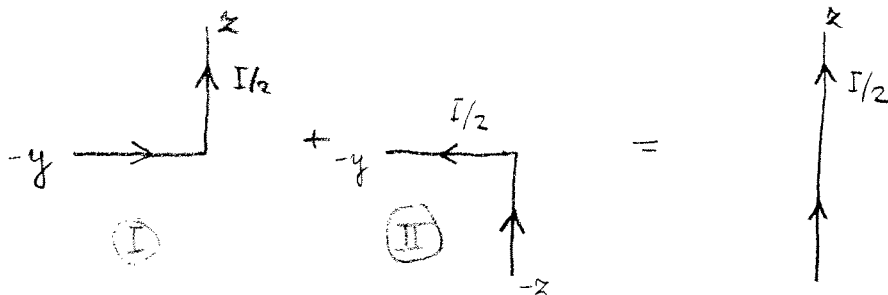
Dar is

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{-y_0 dz}{(y_0^2 + z^2)^{3/2}} \hat{x}$$

Integreren geeft:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= - \frac{\mu_0 I y_0}{4\pi} \hat{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(y_0^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= - \frac{\mu_0 I y_0}{4\pi} \hat{x} \left[\frac{z}{y_0^2 \sqrt{y_0^2 + z^2}} \right]_0^{\infty} \\ &= - \frac{\mu_0 I y_0}{4\pi} \hat{x} \frac{1}{y_0^2} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{y_0^2 + z^2}} \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi y_0} \hat{x} \end{aligned}$$

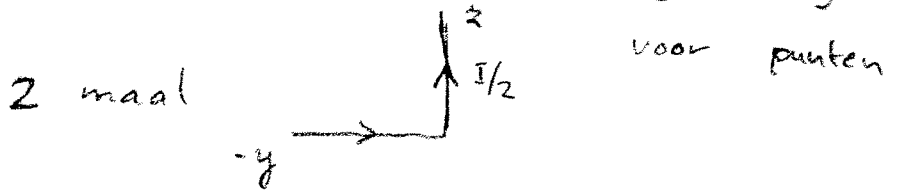
b) Superpositie maakt het volgende mogelijk:



(Dit staat steeds voor: "het magneetveld van...")

De stromen langs de y-as hebben elkaar op. De stromen langs de z-as zijn elkaars antigespiegelde in het xy-vlak. Dus het B-veld van de z-stroom van II is gelijk aan het B-veld van de z-stroom van I voor de punten in het spiegelvlak zoals punt $(0, y_0, 0)$. Dit betekent

dat de linker kant van de symbolische vergelijking gelijk is aan :

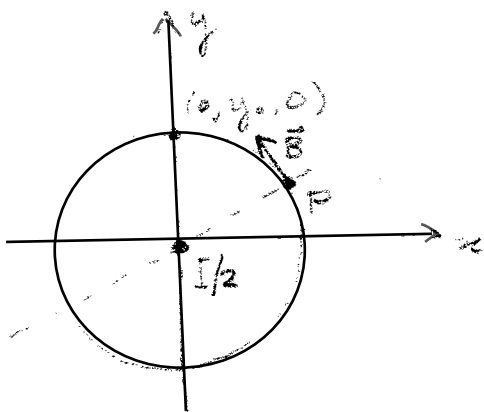


in het xy -vlak. Omdat verdubbelen van de stroom een verdubbeling van het B-veld teweeg brengt volgens Biot-Savart, is dit weer gelijk aan :



Hiermee is het gestelde bewezen.

c) Om de wet van Ampère toe te passen kiezen we een cirkelvormig integratiepad door punt $(0, y_0, 0)$ dat ligt in het xy -vlak:



Ieder vlak dat de z -as bevat is een symmetrievlak. Het gestippelde vlak is een voorbeeld. Het B-veld in punten in dit vlak moet er dus loodrecht op staan: punt P bijvoorbeeld. Rotatiesymmetrie rond de z -as leert dat $|\vec{B}|$ constant is langs het pad.

Conclusie: op het hele pad is \vec{B} parallel aan een elementje $d\vec{l}$ van het pad: $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$, en B is er constant.

De wet van Ampère zegt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I/2$$

(Let op dat we tegen de klok in integreren, zodat de stroom I positief genomen moet worden: rechterhand.)

$$\Rightarrow \oint B dl = \mu_0 I/2$$

$$\Rightarrow B \oint dl = \mu_0 I/2$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi y_0 = \mu_0 I/2$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi y_0}$$

voor alle punten op de cirkel

In het bijzonder: $\vec{B}(0, y_0, 0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y_0} \hat{x}$