

1) Symmetrieën:

- a. - Een vlak loodrecht op de z-as is een spiegelvlak van de ladingsverdeling: Het E-veld in punten in het spiegelvlak ligt dus in dit vlak.
- Een vlak dat de z-as bevat is ook een spiegelvlak: Het E-veld ligt dus ook in dit vlak. De twee spiegelsymmetrieën samen leveren dus: $\vec{E}^{\delta}(\vec{r}_0) = f(r_0) \hat{r}_0$.
- Er is translatiesymmetrie langs de z-as: Het E-veld hangt dus niet af van de z-coördinaat.
- Er is rotatiesymmetrie rond de z-as. Het E-veld hangt dus ook niet af van de hoek φ . Deze twee symmetrieën leveren dus nog: $\vec{E}^{\delta}(\vec{r}_0) = f(\rho_0) \hat{\rho}_0$

Gauss:

Kies als Gauss-oppervlak een cilinder met straal ρ_0 en hoogte L . Boven en onderop liggen "deksels", maar de flux hierdoor is nul omdat de normaal \hat{z} en $-\hat{z}$ er loodrecht staan op $\vec{E}^{\delta} \sim \hat{\rho}_0$. Met de wet van Gauss:

$$\oint \vec{E}^{\delta} \cdot d\vec{O} = \frac{Q_{\text{omvat}}}{\epsilon_0} = \frac{\tau_0 \cdot \pi (\rho_0 - \delta)^2 L}{\epsilon_0}$$

$$\int_{\text{mantel}} \vec{E}^{\delta}(\vec{r}_0) \cdot \hat{n} \, dO = \frac{\tau_0 \pi (\rho_0 - \delta)^2 L}{\epsilon_0} \quad (\text{bijdrage deksels} = 0)$$

$$\int_{\text{mantel}} f(\rho_0) \, dO = \text{idem} \quad (\hat{\rho}_0 \cdot \hat{n} = 1 \text{ op mantel})$$

$$f(\rho_0) \int_{\text{mantel}} dO = \text{idem} \quad (f(\rho_0) \text{ is constant op de mantel})$$

$$f(\rho_0) \cdot 2\pi \rho_0 L = \text{idem}$$

$$f(\rho_0) = \frac{\tau_0 (\rho_0 - \delta)^2}{2\epsilon_0 \rho_0}$$

Het elektrisch veld is dus:

$$\vec{E}^{\delta}(\vec{r}_0) = \frac{\tau_0 (\rho_0 - \delta)^2}{2\epsilon_0 \rho_0} \hat{\rho}_0$$

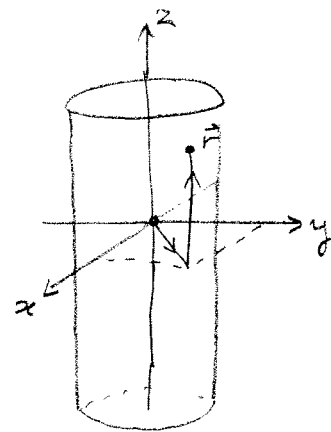
b.(i) Kies een pad dat bestaat uit twee stukken:

- 1 - een lijnstuk van $(0,0,0)$ naar $(x,y,0)$
- 2 - een lijnstuk van $(x,y,0)$ naar (x,y,z) .

De bijdrage van 2 is nul, want op deze lijn is $d\vec{r}' = \hat{z} dz'$ loodrecht op $\vec{E}^{hc} \sim \hat{\rho}$.

Op lijnstuk 1 is $d\vec{r}' = \hat{\rho} d\rho'$ zodat

$$\begin{aligned} V^{hc}(\vec{r}) &= - \int \vec{E}^{hc}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ &= - \int_0^{\rho} \frac{\tau_0 \rho'}{2\epsilon_0} \hat{\rho}' \cdot \hat{\rho}' d\rho' \\ &= - \frac{\tau_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\rho} \rho' d\rho' \\ &= - \frac{\tau_0}{4\epsilon_0} \rho^2 \end{aligned}$$



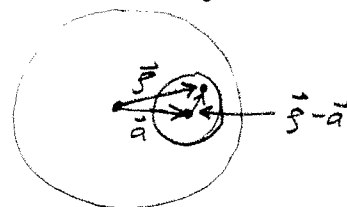
b.(ii) Nu doorsnijdt stuk 1 het oppervlak van de cilinder en moeten we de integraal opdelen in een stuk $\rho < R$ en een stuk $\rho > R$. (Stuk 2 levert nog steeds nul.)

$$\begin{aligned} V^{hc}(\vec{r}) &= - \int_0^R \frac{\tau_0 \rho'}{2\epsilon_0} d\rho' - \int_R^{\rho} \frac{\tau_0 R^2}{2\epsilon_0 \rho'} d\rho' \\ &= - \frac{\tau_0 R^2}{4\epsilon_0} - \frac{\tau_0 R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{R}\right) \\ &= - \frac{\tau_0 R^2}{4\epsilon_0} \left(1 + 2 \ln \frac{\rho}{R}\right) \end{aligned}$$

c. Vat de cilinder met holte op als een superpositie van een massieve cilinder met ladingsdichtheid τ_0 en een met ladingsdichtheid $-\tau_0$, welke verschoven is naar $\vec{a} = (a, 0, 0)$. Voor beide moeten we het veld binnen de cilinder gebruiken:

$$\vec{E}^{hc, \tau_0} = \frac{\tau_0 \rho}{2\epsilon_0} \hat{\rho} = \frac{\tau_0 \vec{\rho}}{2\epsilon_0} \quad \text{met } \vec{\rho} = (x, y, 0)$$

$$\vec{E}^{hc, -\tau_0} = \frac{-\tau_0 (\vec{\rho} - \vec{a})}{2\epsilon_0}$$



Superpositie geeft:

$$\vec{E}^{holte} = \vec{E}^{hc, \tau_0} + \vec{E}^{hc, -\tau_0} = \frac{\tau_0}{2\epsilon_0} (\vec{\rho} - (\vec{\rho} - \vec{a})) = \frac{\tau_0 \vec{a}}{2\epsilon_0}$$

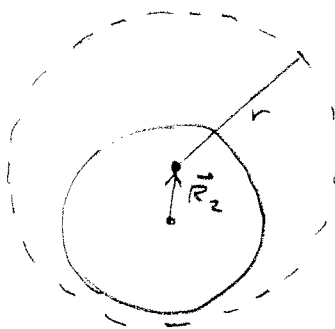
Dit hangt niet van de plaats in de holte af. Het is daar dus een homogeen veld.

2 a. Methode 1:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\
 &= 2\pi R^2 \sigma_0 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)^{3/2}} \\
 &= 2\pi R^2 \sigma_0 \left[-\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)^{1/2}} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{-2\pi R^2 \sigma_0}{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha}} \right) \\
 &= -\frac{2\pi R^2 \sigma_0}{\alpha} \left(\frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \\
 &= -\frac{2\pi R^2 \sigma_0}{\alpha} \left(\frac{-2\alpha}{1-\alpha^2} \right) \\
 &= \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{1-\alpha^2}
 \end{aligned}$$

Methode 2:

Kies een Gauss-oppervlak dat de gehele ladingsverdeling omvat. Omdat gegeven is dat overal buiten de bol het veld hetzelfde is als dat van een puntlading Q_2 in \vec{R}_2 , nemen we als oppervlak een bol met middelpunt \vec{R}_2 . De straal r



is groot genoeg om de bol helemaal te omvatten. De gevraagde lading Q is dus ϵ_0 maal de flux door dit oppervlak. Deze flux is eenvoudig gelijk aan de flux die door een bol rond een puntlading Q_2 in \vec{R}_2 gaat, ofwel $\frac{Q_2}{\epsilon_0}$.

Daarom is $Q = \epsilon_0 \frac{Q_2}{\epsilon_0} = Q_2 = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{1-\alpha^2}$.

b. Binnen de bol moet het veld netto nul zijn, want het is een geleider. De gegeven ladingsverdeling kan echter precies het veld van een puntlading buiten de bol opheffen! Aangezien de ladingsverdeling uniek is, moet dit hem zijn. Dus opheffing van de velden vindt plaats als:

$Q_1 = -q$ in punt $\vec{R}_1 = (0, 0, z_0) = (0, 0, \frac{R}{\alpha})$

We moeten dus kiezen: $\alpha = \frac{R}{z_0}$

en $-q = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{\alpha(1-\alpha^2)}$

Dit is precies bijdrage (i) aan de totale ladingsverdeling. Maar de geleidende bol is netto neutraal, dus (z.o.z.)

de totale lading van bijdrage (i) moet gecompenseerd worden door een even grote hoeveelheid tegengestelde lading, die homogeen verdeeld zit. Deze bijdrage (ii) veroorzaakt geen E-veld binnenin de bal, zoals gegeven is (en ook bekend is). Deze "compensatielading" is te berekenen met de uitkomst van onderdeel (a):

$$\begin{aligned}
 -Q &= -\frac{4\pi R^2}{1-\alpha^2} \sigma_0 = -\frac{4\pi R^2}{1-\alpha^2} \left\{ -\alpha(1-\alpha^2) \frac{q}{4\pi R^2} \right\} \\
 &= \alpha q \\
 &= \frac{R}{z_0} q .
 \end{aligned}$$

c. De kracht op q is te berekenen uit een superpositie van de krachten veroorzaakt door beide ladingsverdelingen uit onderdeel (b). Maar gegeven is, dat elk hiervan te vervangen is door een simpele puntlading.

Bijdrage (i) is die van de puntlading $Q = -\frac{R}{z_0} q$ in het punt $(0, 0, \alpha R) = (0, 0, \frac{R^2}{z_0})$:

$$\vec{F}(i) = \frac{q \left(\frac{Rq}{z_0} \right)}{4\pi\epsilon_0 \left(z_0 - \frac{R^2}{z_0} \right)^2} \hat{z} \quad (\text{aantrekkend})$$

Bijdrage (ii) is die van een puntlading $+\frac{R}{z_0} q$ in de oorsprong:

$$\vec{F}(ii) = \frac{q \left(\frac{Rq}{z_0} \right)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z_0^2} (-\hat{z}) \quad (\text{afstotend})$$

In totaal dus:

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{z_0} \left(\frac{1}{\left(z_0 - \frac{R^2}{z_0} \right)^2} - \frac{1}{z_0^2} \right) \hat{z} .$$

3) a. De equivalente poolverdeling bestaat uit twee bijdragen:

- een oppervlaktepoolverdeling $-\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu} = 0$
- een lijnpoolverdeling $\vec{\mu} \cdot \vec{n} = \begin{cases} 0 & \text{op het rechte lijnstuk} \\ \mu \hat{y} \cdot \hat{\rho} & \text{op de halve cirkel} \end{cases}$

Er blijft dus alleen op de halve cirkel een lijnpoolverdeling over van $\mu \hat{y} \cdot \hat{\rho} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \mu \sin\varphi$.

b. Bereken het magneetveld door integratie over de poolverdeling:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dP}{4\pi} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad \text{met} \quad dP = \mu \sin\varphi dl = \mu R \sin\varphi d\varphi$$

$$\vec{r}_0 = (0, 0, z)$$

$$\vec{r} = (R \cos\varphi, R \sin\varphi, 0)$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{-R^2 \cos\varphi \sin\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{-R^2 \sin^2\varphi d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{z R \sin\varphi d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Het is duidelijk dat $B_x = B_z = 0$ na integratie over $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Verder is:

$$B_y = -\frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi = -\frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi \cos\varphi \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$= -\frac{\mu_0 \mu}{8} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

c. Er zijn twee bijdragen:

1- lijnstuk langs y-as:

$$\text{Biot-Savart: } d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad \text{met} \quad d\vec{r} = (0, dy, 0)$$

$$\vec{r} = (0, y, 0)$$

$$\vec{r}_0 = (0, 0, z)$$

Eerst het uitproduct:

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & -y & z \end{vmatrix} = z dy \hat{x}$$

Dan is:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{x} \int_{-R}^{+R} \frac{z dy}{(z^2 + y^2)^{3/2}}$$

(Let op het teken: hier integreren we in de richting van de stroom. I is dus positief, maar we gaan van $+R$ naar $-R$. Je kan ook van $-R$ naar $+R$ gaan: de stroom is dan $-I$.)

De primitieve is gegeven in de tabel:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_{+R}^{-R} \frac{y}{z^2 \sqrt{z^2 + y^2}} dy = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \frac{2R}{z \sqrt{z^2 + R^2}}$$

z-de halve cirkel:

Biot-Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$ met $\vec{r}_0 = (0, 0, z)$
 $\vec{r} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$
 $d\vec{r} = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0) d\varphi$

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R \sin \varphi & R \cos \varphi & 0 \\ -R \cos \varphi & -R \sin \varphi & z \end{vmatrix} d\varphi = (z R \cos \varphi \hat{x} + z R \sin \varphi \hat{y} + R^2 \hat{z}) d\varphi$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{z R \cos \varphi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{z R \sin \varphi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\varphi = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Superpositie van beide stukken:

$$\begin{cases} B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{z R}{z(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left(z - \frac{z^2 + R^2}{z} \right) \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{-R^2}{z} \\ B_y = 0 \\ B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\pi R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Dit is precies wat er in vectorvorm staat in de opgave.

d. Volgens het equivalentieprincipe van Ampère is het veld van de stroomkring gelijk aan dat van een platte magneet waarvan de kring de rand is, maar met homogene magnetisatie loodrecht op het vlak, dus in de z -richting. Het is de positieve z -richting vanwege de rechterhandregel:

