Hertentamen *Elektromagnetisme* (NS-103B)

maandag 5 juli 2010

14:00–17:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van onderstaande algemene gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\boldsymbol{F}^{\text{el}}_{Q,\boldsymbol{R}\to q,\boldsymbol{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\boldsymbol{F}^{\text{mag}}_{P,\boldsymbol{R}\to p,\boldsymbol{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \frac{Q_{\text{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

$$\oint \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0\,I_{\text{omvat}} \qquad \text{(wet van Ampère)}$$

$$\boldsymbol{E}^{Q,\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{op } q \text{ in } \boldsymbol{r}} = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(kracht op puntlading in extern veld)}$$

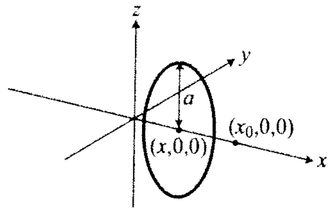
- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\boldsymbol{\nu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\boldsymbol{\nu}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$.

1

1 Een geladen ring en een geladen cilinderoppervlak

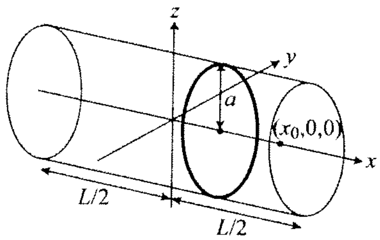
a: 8 b: 10 c: 12 (totaal: 30)

Beschouw een cirkelvormige ring met straal a, parallel aan het yz-vlak, en met $(x, 0, 0)$ als middelpunt. De ring is homogeen geladen, met lijnladingsdichtheid λ.



a. Toon aan dat geldt voor het elektrische veld $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ri}}$ van de ring in een punt $(x_0, 0, 0)$ op de x-as:

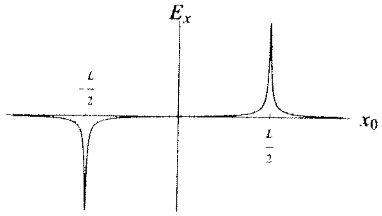
$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{ri}}(x_0, 0, 0) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{(x_0 - x)}{\left\{a^2 + (x_0 - x)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\, \hat{\boldsymbol{x}}$$



Beschouw nu een cilinderoppervlak met lengte L en straal a, waarvan de as op de x-as ligt. Het oppervlak loopt van $x = -\frac{L}{2}$ tot $x = \frac{L}{2}$, en is homogeen geladen met oppervlakteladingsdichtheid σ. Het elektrische veld $\boldsymbol{E}^{\mathrm{co}}$ van het oppervlak in een punt $(x_0, 0, 0)$ op de x-as is te bepalen met gebruikmaking van het resultaat van onderdeel a). Denk daartoe het cilinderoppervlak opgebouwd uit vele ringvormige lijnladingen met dikte $\mathrm{d}x$, en maak gebruik van het superpositiebeginsel.

b. Toon op de aangegeven manier aan dat geldt:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{co}}(x_0, 0, 0) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(x_0 - \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2}} \right) \hat{\boldsymbol{x}}$$



In de grafiek is voor een zeer lang cilinderoppervlak ($L = 200\,a$) de x-component van het elektrische veld weergegeven als functie van de positie x_0 op de x-as. Voor punten op de as die ver genoeg verwijderd zijn van de uiteinden geldt dat het elektrische veld praktisch nul is.

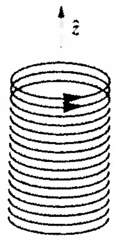
Voor een oneindig lang cilinderoppervlak geldt zelfs *exact* dat *overal* binnen het oppervlak het elektrische veld nul is.

c. Toon met behulp van symmetrie-argumenten en de wet van Gauss aan dat het elektrische veld van een homogeen geladen oneindig lang cilinderoppervlak overal binnen het oppervlak nul is.
<u>Let op:</u> U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

2 Een stroomspoel met rechthoekige windingen

totaal: 25

Een oneindig lange stroomspoel bestaat uit zeer dicht opeen liggende cirkelvormige windingen. De spoel voert in de aangegeven richting een stroom I. Er geldt dan voor het magnetische veld van de spoel, met n het aantal windingen per meter:



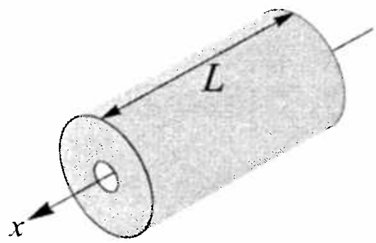
$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \mu_0\, n\, I\, \hat{\boldsymbol{z}} & \text{binnen de spoel} \\ \\ 0 & \text{buiten de spoel} \end{cases}$$

Beschouw nu een oneindig lange stroomvoerende spoel waarvan de windingen niet cirkelvormig zijn, maar *rechthoekig*.

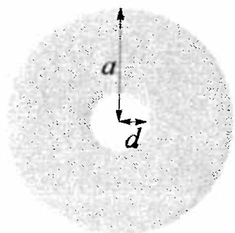
Ga na, met gebruikmaking van symmetrie-overwegingen en de wet van Ampère, in hoeverre het bovenstaande resultaat ook geldt voor het magnetische veld van de oneindig lange spoel met *rechthoekige* windingen.
Gegeven: U mag zonder bewijs gebruik maken van het feit dat oneindig ver verwijderd van de spoel het magnetische veld nul is.
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

3 Een uitgeholde cilindermagneet

a: 5 b: 5 c: 10 d: 10 e: 5 (totaal: 35)



Cilindermagneet met holte



Vooraanzicht

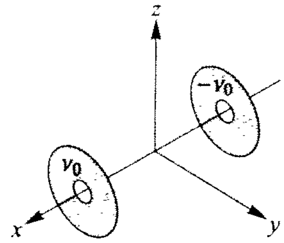
Beschouw een cilindermagneet die massief is op een cilindervormige holte na. De magneet heeft lengte L en straal a. De straal van de holte, die concentrisch is met de as van de magneet, is d. De as van de cilinder ligt op de x-as, tussen $x = -\frac{1}{2}L$ en $x = +\frac{1}{2}L$. De magneet is homogeen gemagnetiseerd in de lengterichting. Er geldt dus in het gebied waar de magneet massief is voor de volumedipooldichtheid $\boldsymbol{\nu}$ (met ν_0 een constante):

$$\boldsymbol{\nu} = \nu_0\, \hat{\boldsymbol{x}}$$

a. Leg met een eenvoudig symmetrie-argument uit dat het magnetische veld *op de as van de holte* alleen een x-component heeft: $B_y(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0$.

De uitgeholde magneet opgevat als een *pool*verdeling

b. Toon aan dat de equivalente *pool*verdeling van ν bestaat uit twee homogene oppervlakte*pool*verdelingen:



(i) Een verdeling met oppervlakte*pool*dichtheid ν_0 op een schijf met een gat in het vlak $x = \frac{1}{2}L$. De binnenstraal is d, de buitenstraal a.

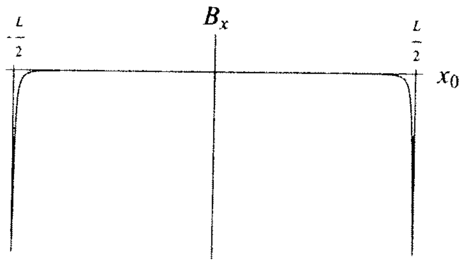
(ii) Een verdeling met oppervlakte*pool*dichtheid $-\nu_0$ op een schijf met een gat in het vlak $x = -\frac{1}{2}L$. De binnenstraal is d, de buitenstraal a.

Gegeven is dat geldt voor het magnetische veld van een homogene poolverdeling met oppervlakte*pool*dichtheid σ_0 op een schijf in het vlak $x = 0$, met straal s en met het middelpunt in de oorsprong:

$$\text{voor } x > 0: \qquad B_x(x,0,0) = \frac{1}{2}\mu_0\,\sigma_0\left(1 - \frac{x}{\sqrt{s^2 + x^2}}\right)$$

c. Leg met dit gegeven uit dat op de as van de holte het magnetische veld ten gevolge van de uitgeholde magneet gegeven wordt door ($|x_0| < \frac{1}{2}L$):

$$B_x(x_0,0,0) = -\frac{1}{2}\mu_0\,\nu_0\left(\frac{x_0 - \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(x_0 - \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{x_0 - \frac{L}{2}}{\sqrt{d^2 + \left(x_0 - \frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{x_0 + \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{x_0 + \frac{L}{2}}{\sqrt{d^2 + \left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2}}\right)$$

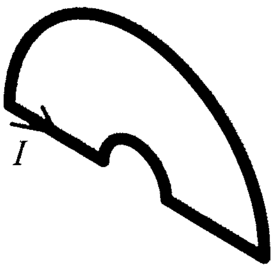


In de grafiek is voor een zeer lange uitgeholde cilindermagneet ($L = 200\,a$; $a = 4\,d$) het magnetische veld weergegeven als functie van de positie x_0 op de as. Er geldt dat, op randeffecten na, het magnetische veld op de as van de holte praktisch nul is.

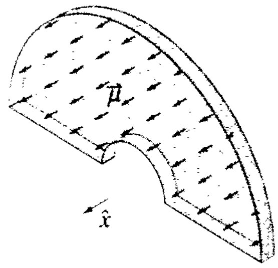
Dit resultaat gaan we in het vervolg van de opgave nog op een andere manier afleiden.

De uitgeholde magneet opgevat als twee stroomspoelen

Volgens het equivalentieprincipe van Ampère geeft een dunne platte magneet die loodrecht op het vlak gemagnetiseerd is buiten de magneet hetzelfde magnetische veld als een kring die een constante stroom voert. Het magnetische veld van de stroomkring is dus hetzelfde als het magnetische veld van een homogene loodrechte dipoolverdeling over een oppervlak waarvan de kring de rand is. De omloopszin van de stroom is volgens de rechterhandregel gerelateerd aan de richting van de magnetisatie. Zie ook de figuur op de volgende pagina.



geven hetzelfde magnetische veld



kring met stroom I

dipoolverdeling met oppervlaktedipool-dichtheid $\boldsymbol{\mu} = I\hat{\boldsymbol{x}}$

d. Om het magnetische veld van de uitgeholde magneet in de holte te bepalen, kunnen we de magneet vervangen denken door twee cilindervormige stroomspoelen die beide concentrisch zijn met de as van de cilinder. De straal van de ene spoel is a, die van de andere d. Als beide spoelen evenveel windingen per lengte-eenheid bevatten, is de stroom die door de spoelen loopt in absolute waarde even groot maar is de omloopszin ervan tegengesteld.

   (i) Leg deze beweringen uit met behulp van het equivalentieprincipe van Ampère. Maak bij uw uitleg gebruik van een duidelijke tekening.

   (ii) Als het aantal windingen per lengte-eenheid in beide spoelen n is, bepaal dan de grootte van de stroom die in beide spoelen moet lopen om in de holte hetzelfde magnetische veld te krijgen als van de uitgeholde magneet.

   (iii) Geef in een tekening ook de omloopszin aan van de stroom in de spoelen.

In opgave 2 staat het magnetische veld gegeven ten gevolge van een oneindig lange cilindervormige stroomspoel.

e. Leg uit, met behulp van dit gegeven en het resultaat van onderdeel d), dat het magnetische veld van een oneindig lange uitgeholde magneet in de holte nul is.