Tentamen *Elektromagnetisme: Theorie* (NS-107B)

woensdag 3 juli 2013

13:30–16:30 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van navolgende algemene gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren.
  Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES !

Algemene gegevens

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\vec{E}^{\,q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

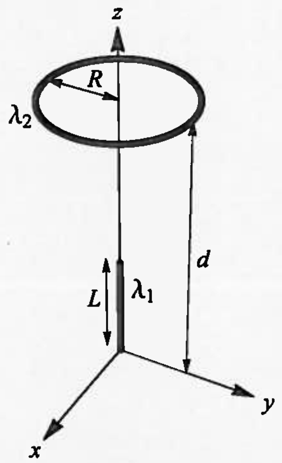
$$\vec{F}^{\,\mathrm{ext}\to q,\vec{r}} = q\,\vec{E}^{\,\mathrm{ext}}(\vec{r}) \qquad \text{(kracht op puntlading in extern veld)}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\nu}$ is de equivalente poolverdeling de combinatie van een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\operatorname{div}\vec{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\nu}\cdot\hat{n}$.

1 Een geladen staaf en een geladen ring

a: 6 b: 6 c: 6 d: 6 e: 6 (totaal: 30)



Beschouw een geladen staaf met lengte L en een geladen ring met straal R. Over beide voorwerpen is de lading gelijkmatig verdeeld. De ring en de staaf zijn zo dun dat ze goed beschreven kunnen worden met een lijnladingsdichtheid. De lijnladingsdichtheid van het staafje is λ_1, die van de ring λ_2 (λ_1 en λ_2 zijn constanten die uitgedrukt worden in de eenheid C/m).

We kiezen het assenstelsel zodanig dat het staafje langs de z-as ligt tussen $z = 0$ en $z = L$. De ring ligt in een vlak evenwijdig aan het xy-vlak. Het middelpunt van de ring is het punt $(0, 0, d)$ op de positieve z-as ($d > 0$).

In deze opgave gaan we de elektrische kracht bepalen die de staaf uitoefent op de ring.

a. Leg met een simpel symmetrie-argument uit dat de kracht van de staaf op de ring alleen een z-component heeft.

b. Leg uit (zonder ingewikkelde berekeningen) dat wanneer de ring zeer ver verwijderd is van de staaf ($d \gg L$ en $d \gg R$), dat dan de elektrische kracht van de staaf (st) op de ring (ri) ongeveer gegeven wordt door:

$$\vec{F}^{\,\mathrm{st}\to\mathrm{ri}} \simeq \frac{LR\lambda_1\lambda_2}{2\epsilon_0 d^2}\,\hat{z} \qquad (1)$$

In de rest van de opgave gaan we de kracht van de staaf op de ring *precies* bepalen. Allereerst bepalen we (de z-component van) het elektrische veld van de staaf.

c. Toon aan dat geldt voor de z-component van het elektrische veld van de staaf:

$$E_z^{\mathrm{st}}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\right\}$$

d. Beschouw nu de ring in het elektrische veld van de staaf.
Toon aan dat geldt, door de krachten van de staaf op lijnelementjes van de ring te bepalen en op te tellen:

$$\vec{F}^{\,\mathrm{st}\to\mathrm{ri}} = \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{R^2 + (d - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right\}\hat{z} \qquad (2)$$

In onderdeel e) gaat u aantonen dat uit (2) volgt: $\vec{F}^{\,\mathrm{st}\to\mathrm{ri}} =$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\epsilon_0}\left\{\frac{L}{d}\frac{R}{d} + \text{termen met minstens drie producten van } \frac{L}{d} \text{ en/of } \frac{R}{d}\right\}\hat{z} \qquad (3)$$

Hieruit zien we dat voor $d \gg R$ en $d \gg L$ de exacte uitdrukking (2) inderdaad in goede benadering gegeven wordt door (1).

e. Toon aan dat (3) geldt voor $\vec{F}^{\mathrm{st}\to\mathrm{ri}}$.
Gegevens: Indien nodig mag u gebruik maken van de volgende formules voor taylorontwikkeling:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \text{termen die minstens gaan als } x^2$$

$$f(x_1, x_2) = f(0,0) + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$$
$$+ \text{ termen met minstens twee producten van } x_1 \text{ en/of } x_2$$

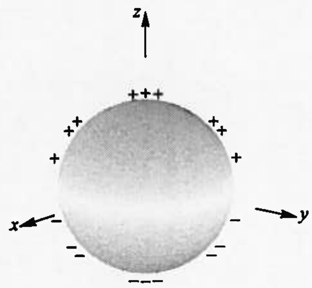
2 Een bolgeleider met holte en een bolmagneet met holte

a: 12 b: 12 c: 6 (totaal: 30)

Gegevens:

Beschouw een boloppervlak met staal R en de oorsprong als middelpunt. Over dit oppervlak is lading verdeeld met dichtheid:

$$\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$$



Hierbij is ϑ de hoek met de positieve z-as, en σ_0 een constante die wordt uitgedrukt in $\mathrm{C/m^2}$. In de figuur is de oppervlakteladingsdichtheid weergegeven door de zwartingsgraad. Op de bovenste helft van het boloppervlak is de dichtheid positief: hoe donkerder des te meer positief. Op de onderste helft van het boloppervlak is de dichtheid negatief: hoe donkerder des te meer negatief.

- In deze opgave mag u gebruiken dat het elektrische veld $\vec{E}^{\sigma}$ van deze ladingsverdeling gegeven wordt door:

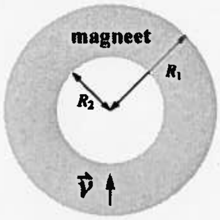
$$\vec{E}^{\sigma}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\,\hat{z} & \text{als } r = |\vec{r}\,| < R \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\dfrac{3\,(\vec{p}\cdot\vec{r}\,)\,\vec{r}}{r^5} - \dfrac{\vec{p}}{r^3}\right\} & \text{als } r = |\vec{r}\,| > R \\ \text{waarbij } \vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3\,\sigma_0\,\hat{z} & \end{cases}$$

  Het elektrische veld is binnen het boloppervlak dus homogeen, terwijl het veld buiten het boloppervlak gelijk is aan dat van een dipool in het middelpunt met elektrisch moment $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3\,\sigma_0\,\hat{z}$.

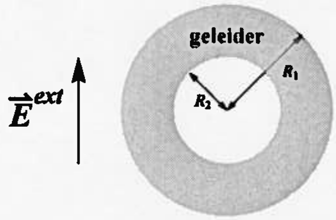
- De uitdrukking voor het elektrische veld is direct om te zetten naar een uitdrukking voor het magnetische veld van een verdeling van *magnetische polen* over een boloppervlak met dichtheid: $\sigma = \nu_0 \cos\vartheta$, waarbij ν_0 een constante is die wordt uitgedrukt in A/m. U mag ook van deze omzetting gebruik maken.

- Verder mag u gebruik maken van het feit dat de ladingsverdeling op een geleider uniek bepaald is.

In deze opgave beschouwen we twee objecten.



Beide objecten zijn *bolvormig* met straal R_1, en hebben een *bolvormige holte* met straal R_2. In beide gevallen valt het middelpunt van de bol samen met het middelpunt van de holte. Zie ook de figuren



Afgezien van de geometrie gaat het verder om twee heel verschillende objecten. Het ene voorwerp (zie links) is een *magneet* die *homogeen* gemagnetiseerd is in de z-richting, met volumedipooldichtheid: $\vec{\nu} = \nu_0 \hat{z}$. Het andere voorwerp (zie rechts) is een *neutrale geleider* die zich bevindt zich in een *homogeen* uitwendig veld in de z-richting: $\vec{E}^{\,\text{ext}} = E_0 \hat{z}$ (E_0 is een constante die uitgedrukt wordt in N/C).

a. Toon aan dat geldt:

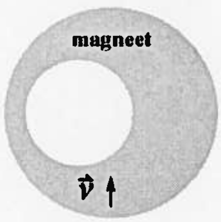
   (i) In de holte van de magneet heerst geen magnetisch veld.

   (ii) Buiten de magneet ($r > R_1$) is het magnetische veld gelijk aan dat van een magnetische dipool in het middelpunt met magnetisch moment $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi \left(R_1^3 - R_2^3\right) \nu_0 \, \hat{z}$.

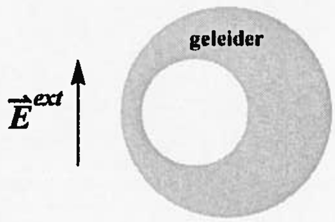
b. Toon aan dat geldt:

   (i) In de holte van de geleider heerst geen elektrisch veld.

   (ii) Buiten de geleider ($r > R_1$) is het elektrische veld de superpositie van het uitwendige veld $\vec{E}^{\,\text{ext}} = E_0 \hat{z}$ en het veld van een elektrische dipool in het middelpunt met elektrisch moment $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \, R_1^3 \, E_0 \, \hat{z}$.



Beschouw tenslotte het geval dat de holtes niet meer concentrisch zijn met de geleider dan wel de magneet, zoals weergegeven in de figuren.

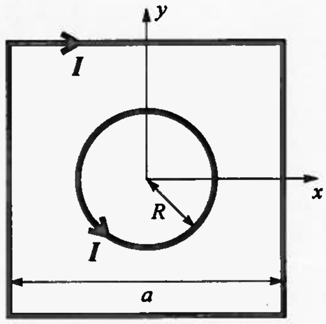


c. Ga na of de beweringen uit de onderdelen a) en b) nog steeds kloppen. Zo nee, geef dan de juiste beweringen voor de velden in de holtes of buiten de geleider dan wel de magneet. Licht uw antwoorden kort toe.

3 Een systeem van twee stroomkringen

a: 10 b: 15 c: 5 (totaal: 30)

Een systeem van twee stroomkringen bestaat uit een stroomkring in de vorm van een cirkel met straal R en een stroomkring in de vorm van een vierkant met zijde a. De kringen voeren in de aangegeven richtingen een stroom I. We kiezen het assenstelsel zo, dat de kringen in het xy-vlak liggen met hun middelpunten in de oorsprong. We gaan allereerst van dit systeem het magnetische veld op de z-as bepalen.



a. Leg met symmetrie-argumenten uit:

(i) dat in punten op de z-as het magnetische veld langs de z-as gericht is;

(ii) dat in punten op de z-as de vier zijden van het vierkant dezelfde bijdrage geven aan de z-component van het magnetische veld.

Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

b. Toon met behulp van de wet van Biot-Savart aan dat op de z-as geldt voor het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{sys}}$ van het systeem van de twee stroomkringen:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{sys}}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \left\{ \frac{\pi R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2}{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)\sqrt{z^2+\frac{a^2}{2}}} \right\} \hat{z}$$

Gegeven: Een primitieve (naar x) van $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

c. Er bestaat een dunne platte magneet die (buiten de magneet) hetzelfde magnetische veld geeft als het systeem van de twee stroomkringen.
Maak een tekening van deze magneet, waarin u de vorm van de magneet aangeeft en ook de grootte en de richting van de magnetisatie. Licht uw tekening kort toe met behulp van het equivalentieprincipe van Ampère.