TENTAMEN ELE1 — 3 juli 2013

1a Elk vlak dat de z-as bevat is een spiegelvlak. Bij spiegeling blijft de ladingsverdeling gelijk; het veld dus ook. Het veld in punten in zo'n spiegelvlak moet in dit vlak liggen. Punten op de z-as hebben een veld dat in al deze spiegelvlakken ligt. Dit veld is dus gericht langs de z-as.

Of:

De z-as is een rotatie-symmetrie as: bij een willekeurige rotatie rond z blijven ladingsverdeling en dus $\vec{E}$ gelijk. Bij rotatie zou een component van $\vec{E}$ loodrecht op de z-as veranderen. Deze component moet dus nul zijn.

b Op zeer grote afstand van elkaar zijn de staaf en de ring te beschouwen als puntladingen met een grootte van resp. $Q_1 = \lambda_1 L$ en $Q_2 = 2\pi R \lambda_2$. Volgens de wet van Coulomb is hun onderlinge kracht dan:

$$\vec{F}^{\,st \to ri} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{z} = \frac{L R \lambda_1 \lambda_2}{2\varepsilon_0 d^2}\hat{z}$$

c In het algemeen is het veld in $\vec{r}_0$ van een ladingselementje $dQ_1 = \lambda_1 dz$ in $\vec{r} = (0,0,z)$:

$$d\vec{E}^{st} = \frac{\lambda_1 dz}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$

$$= \frac{\lambda_1 dz}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x_0, y_0, z_0 - z)}{(x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}$$

Voor de z-component hiervan vinden we dus

$$E_z^{st} = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{z_0 - z}{(x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}\,dz$$

$$= \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2}}\right]_0^L$$

$$= \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\right\}$$

d] Een lijnelementje $d\ell$ van de ring draagt een lading $\lambda_2 d\ell$ en ondervindt daarom een kracht

$$d\vec{F}^{\,st\to ri} = \lambda_2 d\ell \; \vec{E}^{st}(x_0, y_0, z_0)$$

Voor punten op de ring geldt. $x_0^2 + y_0^2 = R^2$ en $z_0 = d$.
Verder beschouwen we alleen de z-component van de kracht:

$$dF_z^{st\to ri} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 d\ell}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{R^2+(d-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right\}$$

Dit integreren we over de ring, maar de integrand is constant hierbij. Dit leidt slechts tot een integraal $\int_{ring} d\ell = 2\pi R$. De netto kracht wordt dus:

$$F_z^{st\to ri} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{R^2+(d-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}}\right\}.$$

Omdat de kracht geen x- en y-component heeft volgt (2).

e] We herleiden de termen in (2) tot een vorm die termen bevatten die klein zijn t.o.v. 1. Voor de tweede term:

$$-\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}} = -\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{R}{d}\right)^2}_{x\ll 1}}} = -\frac{1}{d}\cdot\left\{1 - \frac{R^2}{2d^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{R}{d}\right)^4\right)\right\}$$

De eerste term:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+(d-L)^2}} = \frac{1}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{1\underbrace{-\frac{2L}{d}+\frac{R^2+L^2}{d^2}}_{x\ll 1}}} = \frac{1}{d}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2L}{d}+\frac{R^2+L^2}{d^2}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{L}{d}\right)^2\right)\right\}$$

Het optellen van deze termen geeft tot op leidende orde: $\frac{L}{d^2}$ (slechts afkomstig uit de tweede term) met hogere: $\frac{L^2}{d^3}, \frac{R^2}{d^3}$ etc.
Het eindresultaat wordt hiermee:

$$\vec{F}^{st\to ri} \simeq \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{d^2}\,\hat{z}$$ en dat is precies (1).

2a) We bepalen eerst de equivalente poolverdeling. De volumepooldichtheid $-\text{div}\,\vec{\nu} = 0$, maar er bevindt zich een oppervlaktepooldichtheid $\vec{\nu}\cdot\hat{n} = \nu_0 \cos\theta$ op de buitenkant van de magneet en één van $-\nu_0\cos\theta$ op de binnenkant. Het $\vec{B}$-veld hiervan kan bepaald worden door deze verdeling te vergelijken met de gegevens: Er is dus sprake van een superpositie van een ladingsverdeling $+\sigma_0\cos\theta$ op een bol met straal R_1 en één van $-\sigma_0\cos\theta$ op een bol met straal R_2. We moeten dus σ_0 vervangen door ν_0 en ε_0 door $1/\mu_0$. Zo krijgen we

(i) Voor $r<R_2$ (in de holte) is het veld:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0\nu_0}{3}\hat{z} + \frac{\mu_0\nu_0}{3}\hat{z} = \vec{0}$$

(ii) Voor $r>R_1$ is het veld een superpositie van twee dipoolvelden met moment $\vec{m}_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \nu_0 \hat{z}$ en $\vec{m}_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3(-\nu_0)\hat{z}$, beide in het middelpunt van de magneet.

Dit veld is

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3(\vec{m}_1\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_1}{r^3} + \frac{3(\vec{m}_2\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_2}{r^3}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{3((\vec{m}_1+\vec{m}_2)\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}_1+\vec{m}_2}{r^3}\right\}$$

en dus gelijk aan het veld van een magnetische dipool $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 = \frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)\nu_0\hat{z}$.

b) Als de geleider geen holte zou bevatten, dan was het veld binnenin overal nul. Een ladingsverdeling die dit veroorzaakt is die met dichtheid $\sigma_0\cos\theta$ op het oppervlak, indien we kiezen $\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$. Binnen de bol is het veld dan immers de superpositie van het uitwendige veld $E_0\hat{z}$ en het door de ladingsverdeling opgewekte $-\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z}$, dus precies nul. Omdat de ladingsverdeling uniek bepaald is, is dit de enige oplossing waarvoor dit geldt.

(i) Met een holte binnenin moet het veld in het geleidende materiaal nog steeds nul zijn. De genoemde oplossing is de enige die hieraan voldoet. Bovendien maakt deze oplossing het veld in de holte ook nul.

(ii) De genoemde ladingsverdeling, $\sigma_0\cos\theta$ met $\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$, veroorzaakt buiten de bol een dipoolveld met elektrisch moment $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0\hat{z} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0\hat{z}$. Het totale veld daar is dus een superpositie van dit veld en $\vec{E}^{ext}$.

c)

a(i) De poolverdeling is opnieuw een superpositie van dezelfde twee verdelingen, maar deze keer niet concentrisch. In de holte maakt dat niet uit, omdat binnen de magneet het veld homogeen is en dus nog steeds nul.

a(ii) Buiten de magneet verandert het $\vec{B}$-veld wèl: het is nog steeds een superpositie van twee dipoolvelden, maar hun magnetische moment kunnen niet meer eenvoudig opgeteld worden.

b(i) Deze redenering gaat op exact dezelfde wijze. De bewering is dus nog steeds waar.

b(ii) De ladingsverdeling is derhalve nog steeds dezelfde en het bijbehorende veld dus ook.

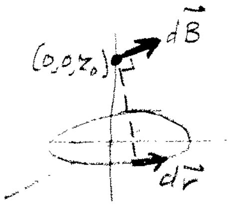
3a (i) Bij spiegeling in het vlak $x=0$ of het vlak $y=0$ blijven de stroomkringen gelijk, maar keert elke stroom I van richting om. Dit zijn dus antisymmetrievlakken. Het $\vec{B}$-veld voor punten in deze vlakken is gericht in de vlakken. Punten op de z-as hebben dus een $\vec{B}$-veld dat in beide vlakken ligt: parallel aan z.

(ii) Bij rotatie rond de z-as over een hoek van $\frac{\pi}{2}$ wordt elk recht stuk getransformeerd in één van de andere rechte stukken. De bijbehorende velden $\vec{B}^{rs}$ draaien dus over $\frac{\pi}{2}$ mee. De z-component hiervan blijft onveranderd bij deze rotatie en is dus gelijk voor elk van de vier stukken.

b) Het veld is de superpositie van de velden van de cirkel $\vec{B}^c$ en de 4 lijnstukken. Voor de z-componenten geldt dus

$$\vec{B}^{sys}(0,0,z) = \left(B_z^c(0,0,z) + 4B_z^{rs}(0,0,z)\right)\hat{z}$$

cirkel:



$$\vec{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$
$$\vec{r}_0 = (0,0,z_0)$$
$$d\vec{r} = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\,d\theta$$

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ -R\cos\theta & -R\sin\theta & z_0 \end{vmatrix} d\theta$$
$$= \left(\hat{x}\, z_0 R\cos\theta + \hat{y}\, z_0 R\sin\theta + \hat{z}\, R^2\right) d\theta$$

Biot-Savart:

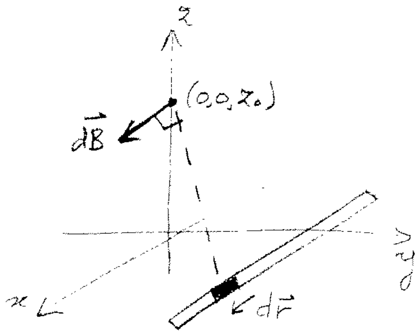
$$d\vec{B}^c = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{(z_0 R\cos\theta,\ z_0 R\sin\theta,\ R^2)\,d\theta}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}^c = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{z} \int_0^{2\pi} \frac{R^2\,d\theta}{(R^2+z_0^2)^{3/2}}$$

(x- en y-componenten worden nul.)

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\hat{z} \frac{R^2}{(R^2+z_0^2)^{3/2}}$$

lijnstuk:



$$\vec{r} = \left(x, \tfrac{a}{2}, 0\right) \qquad \vec{r}_0 = (0,0,z_0)$$

$$d\vec{r} = (1,0,0)\,dx$$

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & -\frac{a}{2} & z_0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot \hat{x} - z_0\,dx\,\hat{y} - \frac{a}{2}\,dx\,\hat{z}$$

$$d\vec{B}^{rs} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\left(0, -z_0, -\frac{a}{2}\right)dx}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z_0^2\right)^{3/2}}$$

We hebben alleen de z-component nodig:

$$B_z^{rs} = -\frac{\mu_0 I a}{8\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z_0^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{8\pi} \left[\frac{x}{\left(\frac{a^2}{4} + z_0^2\right)\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4} + z_0^2}} \right]_{-a/2}^{+a/2}$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{8\pi} \cdot \frac{a}{\left(\frac{a^2}{4} + z_0^2\right)\sqrt{z_0^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

totaal:

$$\vec{B}_z^{sys}(0,0,z_0) = \left(B_z^{c} + 4B_z^{rs}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{\pi R^2}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + z_0^2\right)\sqrt{z_0^2 + \frac{a^2}{2}}} \right\} \hat{z}$$

c) Volgens het equivalentieprincipe van Ampère het magneetveld van de kringen gelijk aan dat van een platte magneet die loodrecht op het vlak van de kring gemagnetiseerd is. In dit geval dan een vierkante magneet met een rond gat. De magnetisatie is omlaag gericht volgens de rechterhandregel.