Hertentamen *Elektromagnetisme 1* (NS-103B)

maandag 2 juli 2012

14:00–17:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van onderstaande gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren.
  Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES!

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\vec{E}^{\,q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}_0-\vec{r}\,)}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}O = \frac{Q_{\mathrm{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0 \qquad \text{(elektrisch veld conservatief)}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times(\vec{r}_0-\vec{r}\,)}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

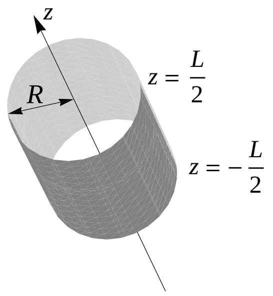
- $-\int_{l(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}\,)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ is de arbeid die we (per eenheid van lading) moeten verrichten om een testlading, beginnend vanuit stilstand in $\vec{r}_1$, te verplaatsen langs het pad l, en tenslotte tot stilstand te brengen in $\vec{r}_2$.
- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\nu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\operatorname{div}\vec{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\nu}\cdot\hat{n}$.

1 Een homogeen geladen cilinderoppervlak

a: 8 b: 4 c: 12 (totaal: 24)

Indien nodig mag u in deze opgave gebruik maken van de volgende gegevens.

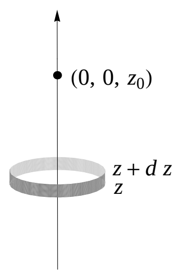
functie	$\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
primitieve	$\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$



Een cilinderoppervlak van isolerend materiaal is homogeen geladen. Het oppervlak heeft lengte L, straal R, en de oppervlakteladingsdichtheid is σ_0 (een constante die wordt uitgedrukt in $\mathrm{C/m^2}$).

We kiezen het assenstelsel zodanig dat de z-as samenvalt met de as van het cilinderoppervlak, en het oppervlak ligt tussen $z=-\frac{1}{2}L$ en $z=\frac{1}{2}L$.

a. Beschouw een smalle strook van het cilinderoppervlak, tussen z en $z+\mathrm{d}z$. Toon aan dat geldt voor de bijdrage van dit strookje aan het elektrische veld in het punt $(0,0,z_0)$:

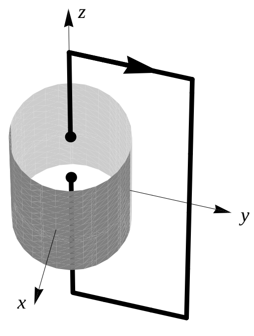


$$\mathrm{d}\vec{E}^{\,[z,z+\mathrm{d}z]} \;=\; \frac{\sigma_0\,R}{2\epsilon_0}\,\mathrm{d}z\,\frac{(z_0-z)}{\left\{R^2+(z_0-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\,\hat{z}$$

b. Toon aan dat geldt voor het elektrische veld van het hele cilinderoppervlak (co) in het punt $(0,0,z_0)$:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{co}}(0,0,z_0) \;=\; \frac{\sigma_0\,R}{2\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(z_0-\frac{1}{2}L\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(z_0+\frac{1}{2}L\right)^2}}\right\}\hat{z}$$

We verplaatsen een puntvormige testlading q vanuit stilstand in $\left(0,0,\frac{1}{2}L\right)$ langs een pad dat gaat via $\left(0,0,\frac{3}{2}L\right)$ naar $\left(0,2R,\frac{3}{2}L\right)$ naar $\left(0,2R,-\frac{3}{2}L\right)$ naar $\left(0,0,-\frac{3}{2}L\right)$ en tenslotte naar $(0,0,0)$ waar we de testlading weer tot stilstand brengen. Tijdens deze verplaatsing verandert de ladingsverdeling op het cilinderoppervlak niet.



c. Bepaal de arbeid die we netto verricht hebben bij deze verplaatsing van de testlading q.

2 Een geleider met holtes

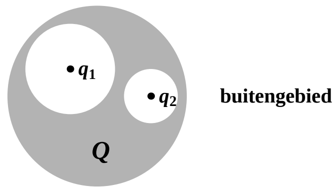
a: 14   b: 8   c: 8   (totaal: 30)

Beschouw een homogeen geladen boloppervlak, met totale lading Q. Er geldt dan voor het elektrische veld van het boloppervlak:

- Binnen het boloppervlak is het veld nul.
- Buiten het boloppervlak is het veld hetzelfde als dat van een puntlading Q in het middelpunt.

a. Toon met behulp van symmetrie-argumenten en de wet van Gauss aan dat het elektrische veld van een homogeen geladen boloppervlak is zoals hierboven weergegeven.
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

Een bolvormige geleider (straal R) heeft twee bolvormige holtes (stralen R_1 en R_2). De totale hoeveelheid lading op de geleider is Q. Verder bevinden zich in de holtes nog puntladingen q_1 resp. q_2. De puntladingen bevinden zich in de middelpunten van de holtes, op onderlinge afstand d. In het buitengebied is geen lading.

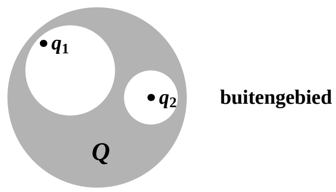


In deze opgave mag u gebruiken dat de ladingsverdeling over een geleider uniek is. Dus als u een ladingsverdeling gevonden heeft die voldoet, dan is dat *de* ladingsverdeling.

b. Leg met een korte toelichting uit:

(i) hoe de lading Q precies over de geleider verdeeld is;
(ii) wat het elektrische veld in het buitengebied is;
(iii) wat de grootte is van de totale elektrische kracht op de puntlading q_1;
(iv) wat de grootte is van de totale elektrische kracht op de puntlading q_2.

Beschouw nu de volgende verandering ten opzichte van de vorige situatie: puntlading q_1 is verschoven naar een andere positie in de holte. Puntlading q_2 is echter op zijn plaats gehouden.



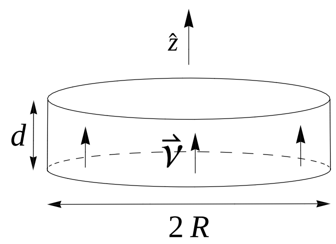
c. Leg kort uit of er in de nieuwe situatie iets is veranderd aan:

(i) de manier waarop de lading Q verdeeld is over de geleider;
(ii) het elektrische veld in het buitengebied;
(iii) de grootte van de totale elektrische kracht op de puntlading q_1;
(iv) de grootte van de totale elektrische kracht op de puntlading q_2.

3 Cilindermagneet en cirkelvormige stroomkring

a: 18 b: 6 c: 12 (totaal: 36)

Een cilindermagneet (straal R, dikte d) is homogeen gemagnetiseerd in de richting van de as van de magneet. We kiezen het assenstelsel zodanig dat de z-as samenvalt met de as van de cilinder, en dat de onderkant en bovenkant van de cilinder samenvallen met $z = 0$ resp. $z = d$. Voor de volumedipooldichtheid $\vec{\nu}$ geldt:



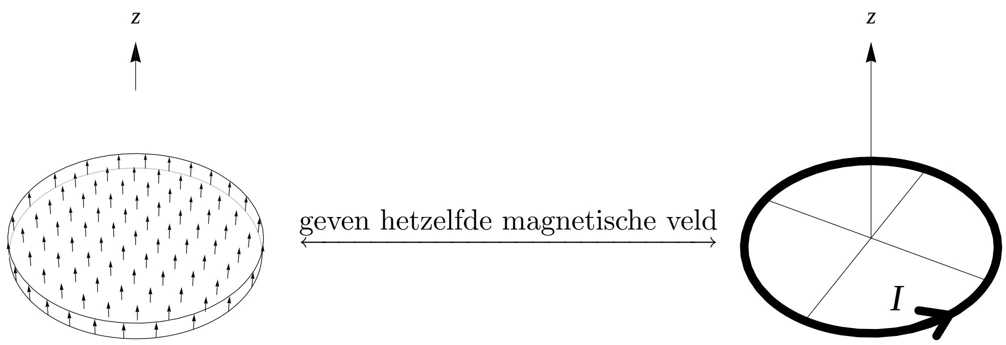
$$\vec{\nu} \;=\; \nu_0\,\hat{z}$$

Hierbij is ν_0 een constante die wordt uitgedrukt in A/m.

a. Toon aan dat geldt voor het magnetische veld van de cilindermagneet op de z-as buiten de cilinder (dus voor $z > d$ en voor $z < 0$):

$$\vec{B}^{\vec{\nu}}(0,0,z) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mu_0\,\nu_0 \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \;-\; \frac{z-d}{\sqrt{(z-d)^2+R^2}} \right) \hat{z} \qquad (1)$$

Volgens het equivalentieprincipe van Ampère is het magnetische veld van een stroomkring hetzelfde als het magnetische veld van een homogene loodrechte dipoolverdeling over een oppervlak waarvan de kring de rand is.



oppervlakteverdeling van magnetische dipolen, met dichtheid $\vec{\mu} = I\,\hat{z}$

kring met stroom I

We gaan het equivalentieprincipe van Ampère nu expliciet controleren door het magnetische veld van een cirkelvormige stroomkring te vergelijken met dat van een zeer platte cilindermagneet. Het magnetische veld van een zeer platte cilindermagneet bepalen we uit (1) met behulp van de volgende limietprocedure:

- De cilindermagneet wordt dunner en dunner: $d \to 0$.
- De volumedipooldichtheid wordt groter en groter: $\nu_0 \to \infty$.
- De effectieve oppervlaktedipooldichtheid $\nu_0\,d$ blijft constant: $\nu_0\,d = I$. Hierbij is I een constante die wordt uitgedrukt in A.

b. Toon aan dat geldt:

$$\lim_{\substack{d\to 0,\nu_0\to\infty \\ \nu_0\,d = I}} \vec{B}^{\vec{\nu}}(0,0,z) \;=\; \frac{\mu_0\,R^2\,I}{2\,(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{z} \qquad (2)$$

Gegeven: $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x +$ termen x^2 en hoger.

c. Controleer voor het onderhavige geval het equivalentieprincipe van Ampère. Beschouw dus een cirkelvormige kring die een stroom I voert. (De cirkel heeft straal R en ligt in het xy-vlak met de oorsprong als middelpunt.) Bepaal met behulp van de wet van Biot-Savart het magnetische veld van deze stroomkring voor punten op de z-as, en ga na dat het resultaat gegeven wordt door het rechterlid van (2).