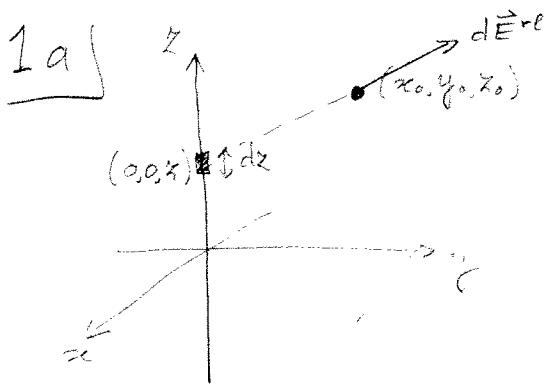


# Herkansing ELE1 - 19 aug. 2013



$$\vec{r} = (0, 0, z)$$
$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Het E-veld van het stukje lading  $dQ = \lambda_0 dz$  in  $\vec{r}$  is:

$$d\vec{E}^{\text{rel}} = \frac{\lambda_0 dz}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x_0, y_0, z_0) - (0, 0, z)}{|(x_0, y_0, z_0 - z)|^3}$$
$$= \frac{\lambda_0 dz}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x_0, y_0, z_0 - z)}{(x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}$$

Dit integreren we over  $z$ :

$$E_z^{\text{rel}}(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0 x_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0 - z}{(x_0^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} dz$$
$$= \frac{\lambda_0 x_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(x_0^2 + t^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\lambda_0 x_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + t^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$= 0$$

$$E_x^{\text{rel}}(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0 x_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(x_0^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\lambda_0 x_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(x_0^2 + t^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\lambda_0 x_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{t}{x_0^2 \sqrt{x_0^2 + t^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$= \frac{\lambda_0 x_0}{2\pi\epsilon_0 x_0^2}$$

$$E_y^{\text{rel}}(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0 y_0}{2\pi\epsilon_0 x_0^2}$$

Samengevat:  $\vec{E}^{\text{rel}}(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0 \hat{\rho}_0}{2\pi\epsilon_0 x_0^2}$

1b) We merken eerst op dat het veld overal radieel gericht is, d.w.z. alleen een component heeft langs  $\hat{\rho}_0$ . Neem immers een vlak loodrecht op de oneindige cilinder. Dan is dit een spiegelsymmetrievlak van de ladingsverdeling. Voor punten in dit vlak heeft het veld alleen een component in dit vlak. Rotatiesymmetrie rond de as van de cilinder garandeert verder dat de grootte van het veld alleen kan afhangen van de afstand tot de symmetrie-as. Dus  $\vec{E} = E(\rho_0) \hat{\rho}_0$

Vervolgens passen we de wet van Gauss toe op een cilinderoppervlak dat concentrisch is met de ladingsverdeling. De straal van dit Gaussisch oppervlak is achtereenvolgens:

$$\underline{\rho_0 < R_2} : \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{omvat}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0}$$

$$\oint E(\rho_0) \hat{\rho}_0 \cdot (\hat{\rho}_0 dA) = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0}$$

$$E(\rho_0) \oint dA = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0}$$

$$E(\rho_0) \cdot 2\pi \rho_0 L = \frac{\lambda_0 L}{\epsilon_0}$$

$$E(\rho_0) = \frac{\lambda_0}{2\pi \epsilon_0 \rho_0}$$

$R_2 < \rho_0 < R_1$  : Het Gaussisch oppervlak ligt geheel in de geleider. Hier is het veld nul. (De omvatte lading dus ook.)

$\rho_0 > R_1$  : Hier is de omvatte lading weer  $\lambda_0 L$ , want de cilinder is elektrisch neutraal. De berekening verloopt dus precies zoals bij  $\rho_0 < R_2$ . Het resultaat is exact hetzelfde.

Tezamen is dit precies het gegeven antwoord.

1c) Als integratiepad kiezen we een rechte lijn van het buitenoppervlak van de cilinder naar het punt op afstand  $r_0$ .

$$\text{Dan is } V^{\text{SYS}}(\vec{r}_0) = V^{\text{SYS}}(R_2 \hat{\rho}_0) - \int_{R_2}^{r_0} \vec{E}^{\text{SYS}}(\vec{r}) \cdot \hat{\rho}_0 dr$$

$$= 0 - \int_{R_2}^{r_0} \frac{\lambda_0}{2\pi \epsilon_0 r} dr$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} [\ln r]_{R_2}^{r_0}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_0}{R_2}$$

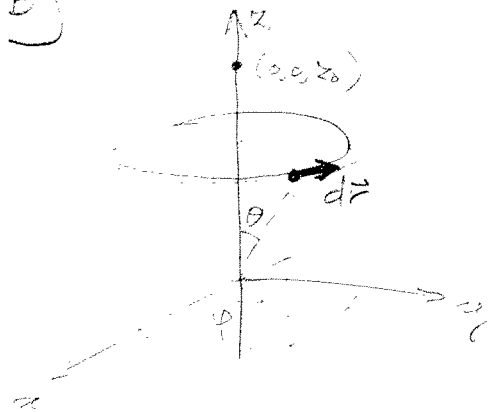
2a) De totale lading op de strook is  $\sigma_0$  vermenigvuldigd met de oppervlakte van de strook:

$$dQ = \sigma_0 \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

Deze lading passeert een willekeurig punt in een periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .  
De stroomsterkte is dan:

$$dI = \frac{dQ}{T} = \omega \sigma_0 R^2 \sin\theta d\theta.$$

b)



$$\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$$

$$\vec{r} = (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \cos\theta)$$

$$d\vec{r} = (-R \sin\theta \sin\varphi, R \sin\theta \cos\varphi, 0) d\varphi$$

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ R \sin\theta \sin\varphi & R \sin\theta \cos\varphi & 0 \\ R \sin\theta \cos\varphi & -R \sin\theta \sin\varphi & z_0 - R \cos\theta \end{vmatrix} d\varphi$$

$$= \hat{x} (R \sin\theta \cos\varphi (z_0 - R \cos\theta))$$

$$+ \hat{y} (R \sin\theta \sin\varphi (z_0 - R \cos\theta))$$

$$+ \hat{z} (R^2 (\sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cos^2\varphi))$$

Dus is:

$$dB_z = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma_0 R^4 \frac{\sin^3\theta d\theta}{(R^2 + z_0^2 - 2z_0 R \cos\theta)^{3/2}}$$

De  $B_x$  en  $B_y$  componenten zijn beide nul na integratie over  $\varphi$ . Dit blijkt natuurlijk ook uit de symmetrie.

c) De stroomverdeling over het oppervlak van de bol veroorzaakt een veld  $\vec{B}$  rot bolopp dat samen met  $\vec{B}$  precies nul oplevert:

$$\vec{B} \text{ rot bolopp} + \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma_0 R \hat{z} + B_0 \hat{z} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \omega \sigma_0 = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0 R}$$

De stroomsterkte in een strook  $d\theta$  wordt dus:

$$dI = -\frac{3}{2\mu_0} B_0 R \sin\theta d\theta$$

Het min-teken geeft dus aan dat de omloopszin in de negatieve  $\hat{\varphi}$ -richting is.

3a) Elk vlak dat de  $z$ -as bevat is een spiegelvlak van de stroomverdeling. Omdat bij spiegeling het magneetveld anti-symmetrisch is, geldt voor punten in het spiegelvlak dat  $\vec{B}$  er loodrecht op moet staan:  $\vec{B}(\vec{r}) = B(s, \varphi, z) \hat{\varphi}$ . Maar er is ook rotatie-symmetrie rond de  $z$ -as dus  $B(s, \varphi, z)$  kan niet van  $\varphi$  afhangen:

$$\vec{B} = B(s, z) \hat{\varphi}.$$

Met de wet v. Ampère bepalen we  $B(s, z)$ . We kiezen een cirkelvormig pad rond de  $z$ -as, door het betreffende punt. Hiervoor geldt  $d\vec{r} = s d\varphi \hat{\varphi}$ . We vinden:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{omvat}}$$

$$\oint B(s, z) \hat{\varphi} \cdot s \hat{\varphi} d\varphi = \mu_0 I_{\text{omvat}}$$

$$B(s, z) = \mu_0 \frac{I_{\text{omvat}}}{s}$$

Opmerkelijk genoeg hangt het veld dus ook niet af van  $z$ . Voor alle punten buiten de spoel ( $P_1, P_2$  en  $P_3$ ) is de omvatte stroomsterkte nul. Het magneetveld is daar dus nul.

b) De equivalente poolverdeling bestaat uit twee bijdragen:

- een volumepoolverdeling  $-\text{div } \vec{\sigma}$ :

$$-\text{div } \vec{\sigma} = -\nu_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} (-y) + \frac{\partial}{\partial y} (x) \right) = 0$$

- een oppervlaktepoolverdeling  $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$  op de rand van de magneet: De rand is het torusoppervlak, welke overal loodrecht staat op de vector  $\hat{\varphi}$ . Daarom is  $\vec{\sigma} \cdot \hat{n} = 0$  overal.

Als een geen polen zijn is er buiten de magneet ook geen veld.

c) Nu bestaat de tweede bijdrage uit onderdeel (b) wel. De poolverdelingen op de twee snijvlakken zijn  $-\nu_0 \hat{\varphi}$  en  $+\nu_0 \hat{\varphi}$ . De twee vlakken zijn in goede benadering parallel en zeer veel groter dan hun onderlinge afstand. We kunnen dus het gegeven gebruiken dat het veld tussen de platen gelijk is aan  $2 \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$  waarbij  $\sigma_0$  moet worden vervangen door  $\nu_0$  en  $\epsilon_0$  door  $1/\mu_0$ . Het magneetveld wordt zo:  $\vec{B} = \mu_0 \nu_0 \hat{\varphi}$ .