

Tentamen *Elektromagnetisme 1* (NS-103B)

woensdag 18 april 2012

15:00–18:00 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van navolgende algemene gegevens gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke wiskundige gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Verder krijgt u 10 punten cadeau.

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\vec{F}_{Q,\vec{R}\rightarrow q,\vec{r}}^{\text{el}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad (\text{wet van Coulomb voor puntladingen})$$

$$\vec{F}_{P,\vec{R}\rightarrow p,\vec{r}}^{\text{mag}} = \frac{\mu_0 Pp}{4\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} \quad (\text{wet van Coulomb voor puntpolen})$$

$$\vec{E}^{q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad (\text{veld puntlading})$$

$$V_{\infty}^{q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_0 - \vec{r}|} \quad (\text{potentiaal t.o.v. oneindig puntlading})$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad (\text{relatie elektrisch veld en potentiaal})$$

$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad (\text{wet van Biot-Savart})$$

Vervolg algemene gegevens

Voor een lijnmagneet langs de z -as, tussen $z = a$ en $z = b$ (waarbij $a < b$), met een lijndipoolverdeling met dichtheid $\vec{\kappa}(z) = \kappa(z) \hat{z}$, wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van:

- een lijnpoolverdeling met dichtheid $-\kappa'(z)$;
- een puntpool in $(0, 0, b)$ met poolsterkte $\kappa(b)$;
- een puntpool in $(0, 0, a)$ met poolsterkte $-\kappa(a)$.

Voor een twee-dimensionale magneet met een oppervlakedipoolverdeling met dichtheid $\vec{\mu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van:

- een oppervlaktepoolverdeling met dichtheid $-\text{div } \vec{\mu}$;
- een lijnpoolverdeling over de rand met dichtheid $\vec{\mu} \cdot \hat{n}$.

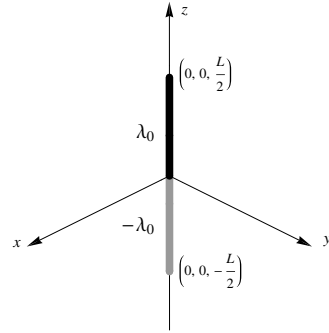
1 Twee tegengesteld geladen staafjes

a: 10 b: 10 c: 10 d: 10 (totaal: 40)

Potentiaal en veld van twee tegengesteld geladen staafjes

Twee staafjes van isolerend materiaal liggen in elkaars verlengde. Beide staafjes hebben de lengte $\frac{1}{2}L$. Verder zijn beide staafjes homogeen geladen: het ene staafje met lijnladingsdichtheid λ_0 en het andere staafje met lijnladingsdichtheid $-\lambda_0$. (λ_0 wordt uitgedrukt in C/m.)

We kiezen het assenstelsel zodanig dat het staafje met lijnladingsdichtheid λ_0 ligt tussen $z = 0$ en $z = \frac{1}{2}L$. Het staafje met lijnladingsdichtheid $-\lambda_0$ bevindt zich tussen $z = -\frac{1}{2}L$ en $z = 0$.



- a. Leg uit dat de volgende uitdrukking geldt voor de potentiaal ten opzichte van oneindig van het systeem van de twee staafjes (met $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ de afstand van het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tot de z -as):

$$V_\infty(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-z_0}^{\frac{L}{2}-z_0} \frac{du}{\sqrt{\rho_0^2 + u^2}} - \int_{-\frac{L}{2}-z_0}^{-z_0} \frac{du}{\sqrt{\rho_0^2 + u^2}} \right] \quad (1)$$

Evaluatie van de integralen in de uitdrukking (1) geeft de volgende expliciete uitdrukking voor de potentiaal ten opzichte van oneindig:

$$V_\infty(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-2 \ln \left\{ -z_0 + \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} \right\} + \ln \left\{ -\left(z_0 + \frac{L}{2}\right) + \sqrt{\rho_0^2 + \left(z_0 + \frac{L}{2}\right)^2} \right\} + \ln \left\{ -\left(z_0 - \frac{L}{2}\right) + \sqrt{\rho_0^2 + \left(z_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \right\} \right]$$

Hiervan mag u in het vervolg van de opgave gebruik maken.

- b. Beschrijf *twee* manieren om het elektrische veld van het systeem van de twee staafjes te bepalen.

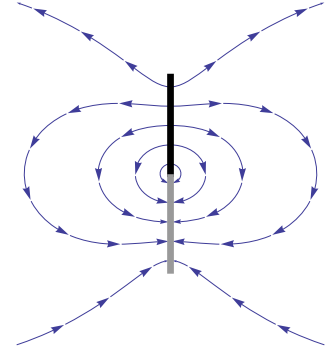
Let op: U hoeft de methodes hier alleen maar te beschrijven. U hoeft de methodes *niet* uit te voeren. U hoeft het elektrische veld hier dus *niet* expliciet te bepalen.

Voor het elektrische veld van het systeem van de twee staafjes blijkt te gelden (met $r = |\vec{r}|$):

$$\vec{E} = E_\rho \hat{\rho} + E_z \hat{z}, \text{ met}$$

$$E_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left\{ \frac{2z}{r} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right\}$$

$$E_z(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{r} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right\}$$



- c. Toon met één van de bij onderdeel b) beschreven methodes aan dat $E_z(\vec{r})$ gegeven wordt door de bovenstaande uitdrukking.

Let op: U hoeft *niet* het volledige elektrische veld expliciet te bepalen. Alleen de z -component volstaat.

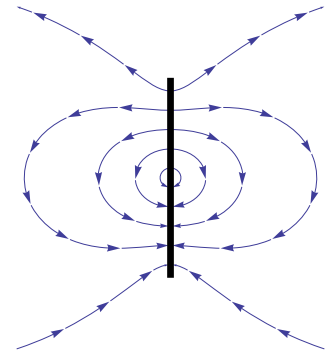
Een magnetisch veld met dezelfde wiskundige vorm

Een magneetstaaf met lengte L kan zo gemagnetiseerd zijn dat het bijbehorende magnetische veld dezelfde wiskundige vorm heeft als het elektrische veld hierboven. (Vervang $\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{\mu_0}$ en $\lambda_0 \rightarrow \frac{\kappa_0}{L}$. Hierbij is κ_0 een constante met de dimensie van magnetische poolsterkte, die dus wordt uitgedrukt in A m.)

$$\vec{B} = B_\rho \hat{\rho} + B_z \hat{z}, \text{ met}$$

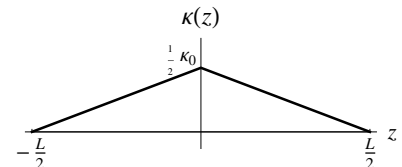
$$B_\rho(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \kappa_0}{4\pi L \rho} \left\{ \frac{2z}{r} - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\rho^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right\}$$

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \kappa_0}{4\pi L} \left\{ -\frac{2}{r} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right\}$$



- d. Een magneetstaaf bevindt zich langs de z -as tussen $z = -\frac{L}{2}$ en $z = \frac{L}{2}$. Toon aan dat er een lijndipooldichtheid $\vec{\kappa}(z) = \kappa(z) \hat{z}$ van de staaf is die aanleiding geeft tot het hierboven weergegeven magnetische veld. Namelijk als:

$$\kappa(z) = \begin{cases} \kappa_0 \left(\frac{z}{L} + \frac{1}{2} \right) & \text{voor } -\frac{L}{2} \leq z \leq 0 \\ \kappa_0 \left(-\frac{z}{L} + \frac{1}{2} \right) & \text{voor } 0 \leq z \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

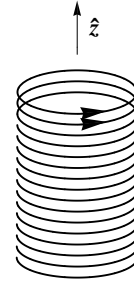


2 Een cilindrische stroomspoel

a: 6 b: 13 c: 6 d: 10 (totaal: 35)

Het veld van een cilindrische stroomspoel

Beschouw een cilindrische stroomspoel met lengte L en straal R . We nemen aan dat de windingen zeer dicht opeen liggen, zodat we de spoel effectief kunnen vervangen door zeer veel losse stroomvoerende cirkels. De spoel (elk van de cirkels) voert in de aangegeven richting een stroom I_0 . We kiezen het assenstelsel zodanig dat de as van de stroomspoel op de z -as ligt, tussen $z = -L$ en $z = 0$.



- a. Toon met behulp van een symmetrie-redenering aan dat voor punten op de z -as het magnetische veld van de spoel langs de z -as gericht is.

Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

Veronderstel dat het aantal windingen per lengte-eenheid n is. Het stukje van de spoel tussen z en $z + dz$ bevat dan $n dz$ windingen, die elk een stroom I_0 voeren. We kunnen dit stukje van de spoel dus opvatten als een cirkelvormige stroomkring (straal R), die een stroom dI voert waarvoor geldt: $dI = n I_0 dz$. Noem nu $d\vec{B}^{[z, z+dz]}$ de bijdrage aan het magnetische veld van het stukje van de spoel tussen z en $z + dz$.

- b. Toon met behulp van de wet van Biot-Savart aan dat geldt:

$$d\vec{B}^{[z, z+dz]}(0, 0, z_0) = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 dz \frac{R^2}{\{R^2 + (z_0 - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

- c. Toon aan dat geldt voor het magnetische veld van de spoel (die zich bevindt tussen $z = -L$ en $z = 0$):

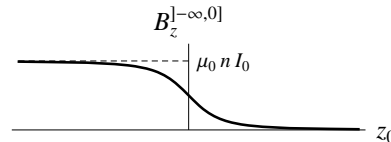
$$\vec{B}^{\text{spoel}}(0, 0, z_0) = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \left(\frac{z_0 + L}{\sqrt{R^2 + (z_0 + L)^2}} - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right) \hat{z} \quad (2)$$

Gegeven: Een primitieve van $\frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ wordt gegeven door $\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$.

Oneindig uitgestrekte cilindrische stroomspoelen

Als we in de uitdrukking (2) de limiet $L \rightarrow \infty$ nemen, dan krijgen we het magnetische veld van een stroomspoel die in één richting oneindig uitgestrekt is (van $z = 0$ tot $z = -\infty$):

$$\vec{B}^{]-\infty, 0]}(0, 0, z_0) = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right) \hat{z}$$



- d. Beschouw tenslotte een stroomspoel die in twee richtingen oneindig uitgestrekt is (van $z = -\infty$ tot $z = +\infty$).

Bepaal het magnetische veld van deze stroomspoel in $(0, 0, z_0)$.

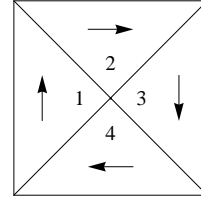
Hint: Probeer uzelf onnodig rekenwerk te besparen door zoveel mogelijk gebruik te maken van eerdere resultaten uit deze opgave en van bekend gedrag van magnetische velden onder spiegeling en dergelijke van de stroomverdeling.

3 Een stuk ijzer met vier Weiss-gebiedjes

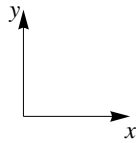
Totaal: 15 punten

Een plat, vierkant stuk ijzer bestaat uit vier deelgebieden (1 t/m 4, zie de figuur). In elk van de deelgebieden is de oppervlakedipooldichtheid $\vec{\mu}$ homogeen. Zulke homogeen gemagnetiseerde gebiedjes heten *Weiss-gebiedjes*.

De pijlen stellen de oppervlakedipooldichtheden in de diverse gebiedjes voor. De *grootte* van de oppervlakedipooldichtheid is overal hetzelfde: $|\vec{\mu}| = \mu$, met μ een positieve constante die uitgedrukt wordt in A. De *richting* van de oppervlakedipooldichtheid is in de verschillende deelgebieden echter verschillend.



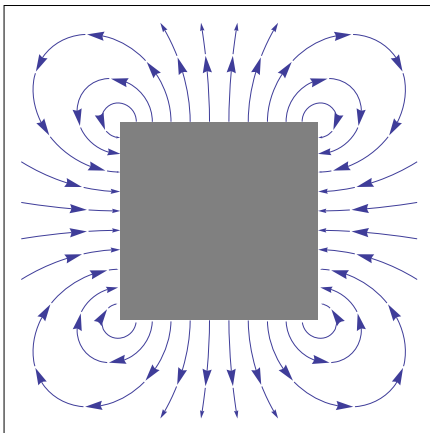
Elk van de deelgebieden is een rechthoekige driehoek, die hoeken van 45° maakt met de randen van het stuk ijzer. Als we het assenstelsel kiezen zoals hiernaast weergegeven, dan geldt voor de dipooldichtheden in de deelgebieden:



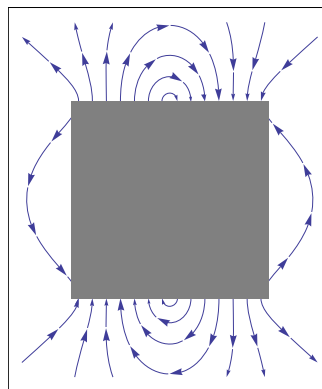
deelgebied	1	2	3	4
dipooldichtheid	$\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hieronder staan drie magnetische velden weergegeven (I, II en III). Eén daarvan behoort bij het stuk ijzer dat zojuist beschreven is. De andere twee magnetische velden behoren bij vierkante stukken ijzer die op een andere manier gemagnetiseerd zijn. De grijze vierkanten stellen de stukken ijzer voor.

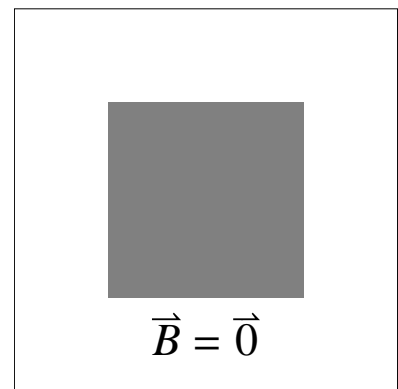
In de gevallen I en II is het veld weergegeven middels het veldlijnenpatroon in de buurt van het stuk ijzer. In geval III is er geen magnetisch veld buiten het stuk ijzer.



I



II



III

Leg uit welk magnetisch veld hoort bij het stuk ijzer met de vier deelgebieden zoals hierboven beschreven. (Indien het juiste magnetische veld van het stuk ijzer volgens u niet weergegeven is, dient u zelf het volgens u juiste veld te schetsen en toe te lichten.)

Hint: Bepaal eerst de equivalente poolverdeling van het stuk ijzer. Voer verder geen ingewikkelde berekeningen uit.