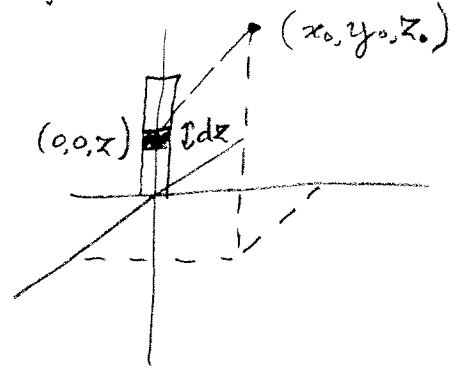


Tentamen Elektromagnetisme 1

18 april 2012

1a) Beschouw eerst het bovenste staafje. Deel dit op in elementjes ter lengte dz . Het elementje op $(0,0,z)$ geeft een bijdrage aan de potentiaal in (x_0, y_0, z_0) van:

$$dV_+(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - z)^2}}$$



De grootte van dQ is $\lambda_0 dz$.

De radiële afstand $\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Vervolgens integreren we over alle elementjes van het staafje:

$$V_+(x_0, y_0, z_0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \frac{dz}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z)^2}} \quad (*)$$

Gebruik nu de substitutie $u = z - z_0$:

$$V_+(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-z_0}^{L/2 - z_0} \frac{du}{\sqrt{\rho_0^2 + u^2}}$$

De bijdrage van het negatief geladen staafje vinden we uit (*) door λ_0 te vervangen door $-\lambda_0$ en de integraal te laten lopen van $-L/2$ tot 0:

$$\begin{aligned} V_-(\vec{r}_0) &= \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^0 \frac{dz}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z)^2}} \\ &= \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2 - z_0}^{-z_0} \frac{dz}{\sqrt{\rho_0^2 + uz}} \quad (**) \end{aligned}$$

Superpositie van (*) en (**) levert precies vergelijking (1) op.

b) Methode 1: Omdat $V(\vec{r}_0)$ bekend is kan het E-veld berekend worden via $\vec{E}(\vec{r}_0) = -\text{grad}V(\vec{r}_0)$

Methode 2: Deel de staafjes op in dezelfde elementjes als in opgave 1a, schrijf de bijdrage van zo'n elementje aan het veld op met de wet van Coulomb en integreer over de lengte van het staafje.

c) Methode 1:

$$\begin{aligned}
 E_z(\vec{r}_0) &= -\frac{\partial}{\partial z_0} V(\rho_0, z_0) \\
 &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-2 \frac{-1 + \frac{z_0}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}}}{\underbrace{-z_0 + \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}}_a} + \frac{-1 + \frac{z_0 + L/2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + L/2)^2}}}{\underbrace{-(z_0 + \frac{L}{2}) + \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + L/2)^2}}_b} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-1 + \frac{z_0 - L/2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - L/2)^2}}}{\underbrace{-(z_0 - \frac{L}{2}) + \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - L/2)^2}}_c} \right]
 \end{aligned}$$

Maak nu gebruik van: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ door in teller en noemer steeds met een geschikte factor $a+b$ te vermenigvuldigen.

$$\begin{aligned}
 E_z(\vec{r}_0) &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2}{\rho_0^2} \left(-1 + \frac{z_0}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}}\right) (\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} + z_0) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\rho_0^2} \left(-1 + \frac{z_0 + L/2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + L/2)^2}}\right) (\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + L/2)^2} + z_0 + \frac{L}{2}) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\rho_0^2} \left(-1 + \frac{z_0 - L/2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - L/2)^2}}\right) (\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - L/2)^2} + z_0 - \frac{L}{2}) \right] \\
 &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \rho_0^2} \left[-2 \left(-\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} + \frac{z_0^2}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}}\right) \right. \\
 &\quad + \left(-\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + \frac{L}{2})^2} + \frac{(z_0 + \frac{L}{2})^2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + \frac{L}{2})^2}}\right) \\
 &\quad \left. + \left(-\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - \frac{L}{2})^2} + \frac{(z_0 - \frac{L}{2})^2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - \frac{L}{2})^2}}\right) \right] \\
 &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \rho_0^2} \left[\frac{2\rho_0^2}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}} - \frac{\rho_0^2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + \frac{L}{2})^2}} - \frac{\rho_0^2}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - \frac{L}{2})^2}} \right] \\
 &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2}{r_0} + \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 + \frac{L}{2})^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - \frac{L}{2})^2}} \right]
 \end{aligned}$$

waarin nog is gebruikt: $r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}$.

Methode 2:

Het veld van het elementje dz in veldpunt \vec{r}_0 is volgens Coulomb

$$dE_z^+(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0 dz}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z_0 - z}{\{s_0^2 + (z_0 - z)^2\}^{3/2}} \quad (\text{voor het positieve staafje})$$

Integreren:

$$\begin{aligned} E_z^+(\vec{r}_0) &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \frac{(z_0 - z) dz}{\{s_0^2 + (z_0 - z)^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{s_0^2 + (z_0 - z)^2}} \right]_0^{L/2} \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{s_0^2 + (z_0 - L/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + z_0^2}} \right) \end{aligned}$$

Het negatieve staafje levert de bijdrage:

$$\begin{aligned} E_z^-(\vec{r}_0) &= \frac{-\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{s_0^2 + (z_0 - z)^2}} \right]_{-L/2}^0 \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{s_0^2 + z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + (z_0 + L/2)^2}} \right) \end{aligned}$$

Dus:

$$\begin{aligned} E_z(\vec{r}_0) &= E_z^+(\vec{r}_0) + E_z^-(\vec{r}_0) \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{z}{\sqrt{s_0^2 + z_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + (z_0 + L/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + (z_0 - L/2)^2}} \right) \end{aligned}$$

d) Om het gevraagde magnetveld te krijgen moet de equivalente poolverdeling, volgens de gegevens gelijk aan $-\chi'(z)$, een positieve constante χ_0/L op de positieve z -as opleveren en een negatieve constante $-\chi_0/L$ op de negatieve z -as. Dit is duidelijk het geval als:

$$\chi(z) = \begin{cases} -\chi_0 z/L & \text{voor } 0 \leq z \leq L/2 \\ +\chi_0 z/L & \text{voor } -L/2 \leq z \leq 0 \end{cases}$$

Dit geeft weliswaar de gewenste lijnpoolverdeling, maar er komen ook puntpolen bij:

in $(0,0, L/2)$ met poolsterkte: $-\frac{\chi_0}{2}$

in $(0,0, -L/2)$ met poolsterkte: $+\frac{\chi_0}{2}$

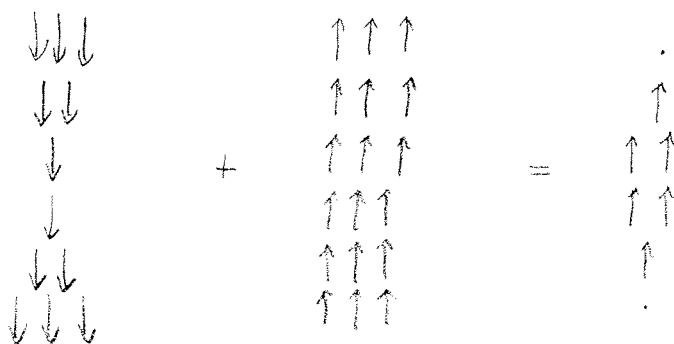
(en in de oorsprong met poolsterkte twee keer nul)

Om deze laatste op te heffen moet er nog bij: een puntpool van $+\chi_0/2$ in $z = L/2$ en een van $-\chi_0/2$ in $z = -L/2$. Dit komt overeen met een constante lijndipooldichtheid van $\frac{\chi_0}{2}$.

Dus bij elkaar:

$$\chi(z) = \begin{cases} -\chi_0 \frac{z}{L} + \frac{\chi_0}{2} & \text{voor } 0 \leq z \leq \frac{L}{2} \\ +\chi_0 \frac{z}{L} + \frac{\chi_0}{2} & \text{voor } -\frac{L}{2} \leq z \leq 0 \end{cases}$$

Schematisch kunnen we de twee bijdragen voorstellen als



2a) Elk vlak dat de z -as bevat is een antispiegelvek van de stroomverdeling, d.w.z. de stroomverdeling keert alleen om van richting, maar blijft verder gelijk. Bij zo'n spiegeling geldt dat het B -veld in het gespiegelde punt de gespiegelde is v.h. B -veld in het oorspronkelijke punt. Maar nu vallen deze twee punten samen voor punten op de z -as. Bij spiegeling kan het veld op de z -as dus niet van richting veranderen. Daarom ligt het veld daar parallel aan de z -as.

Anders:

De stroomverdeling is symmetrisch voor elke rotatie rond de z -as. Het B -veld moet dezelfde symmetrie bezitten. Voor punten op de z -as kan het gerooteerde veld alleen samenvallen met het oorspronkelijke veld als dit parallel is met de z -as.

b) Volgens Biot-Savart is de bijdrage van het stukje $d\vec{l}$ van de stroomkring:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$

(Merk op dat we nu eerst integreren over $d\vec{l}$. Later volgt dI nog.)

Eerst doen we het uitproduct:

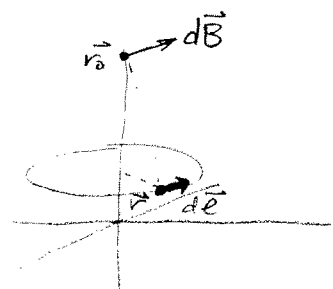
$$d\vec{l} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ -R\cos\theta & -R\sin\theta & z_0 - z \end{vmatrix} d\theta$$

$$= \left\{ R(z_0 - z)\cos\theta \hat{x} + R(z_0 - z)\sin\theta \hat{y} + R^2 \hat{z} \right\} d\theta$$

Nu integreren we over θ van 0 tot 2π . We zien direct dat $B_x = B_y = 0$, zoals we al wisten.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \hat{z} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 dz \frac{R^2}{(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} \hat{z}$$



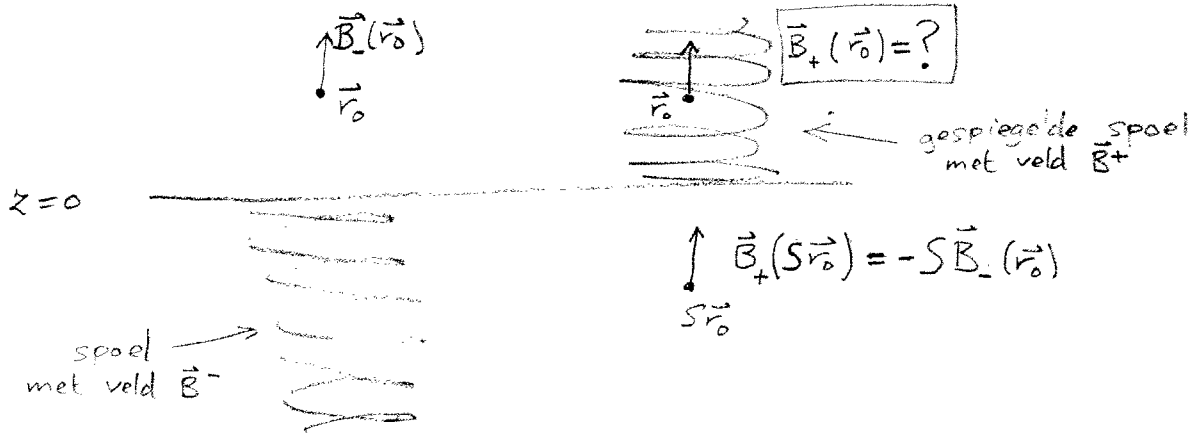
$$\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$$

$$\vec{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$$

$$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0) d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \underline{c)} \quad \vec{B} &= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \int_{-L}^0 \frac{dz}{(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \int_{-L-z_0}^{-z_0} \frac{du}{(R^2 + u^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \left[\frac{u}{R^2 \sqrt{R^2 + u^2}} \right]_{-L-z_0}^{-z_0} \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \hat{z} \left(\frac{L+z_0}{\sqrt{R^2 + (L+z_0)^2}} - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right)
 \end{aligned}$$

d) De half-oneindige spoel rond de positieve z -as kan uit de eerste verkregen worden door spiegeling in het vlak $z=0$. Hierbij maken we gebruik van de eigenschap: $\vec{B}_+(S\vec{r}_0) = -S\vec{B}_-(\vec{r}_0)$ waarbij S staat voor deze spiegeling.



We willen weten: $\vec{B}_+(\vec{r}_0) = \vec{B}_+(-S\vec{r}_0)$
 $= -S\vec{B}_-(-\vec{r}_0)$ volgens symmetrie-eigenschap
 $= \vec{B}_-(\vec{r}_0)$ want \vec{B}_- staat loodrecht op het spiegelvlak

Superpositie geeft:

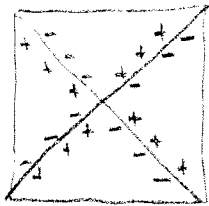
$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{r}_0) &= \vec{B}_-(\vec{r}_0) + \vec{B}_+(\vec{r}_0) \\
 &= \vec{B}_-(\vec{r}_0) + \vec{B}_-(\vec{r}_0) \\
 &= \mu_0 n I_0 \hat{z}
 \end{aligned}$$

3] We bepalen eerst de equivalente poolverdeling van deelgebied 1. Omdat de dipooldichtheid homogeen is, is de oppervlaktepooldichtheid nul. ($-\text{div } \vec{m} = 0$). Op de twee randen die contact maken met gebieden 2 en 4 is er een lijnpoolverdeling:

$$\text{rand 1 en 2 : } \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{dichtheid} = \vec{m}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$$

$$\text{rand 1 en 4 : } \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ " } = \vec{m}_1 \cdot \hat{n} = -\frac{\mu}{\sqrt{2}}$$

Maar deze worden steeds precies opgeheven door de poolverdeling op de randen van de andere gebiedjes:



Er is dus netto geen poolverdeling. Dat betekent dat er buiten het stuk ijzer geen magnetisch veld heerst.