Tentamen Elektromagnetisme
13 april 2017

1a | 1 { Een lijnelementje in $\vec{r} = (x, 0, 0)$ heeft een
(15) 1 { lengte dx en draagt een lading $dQ = \frac{Q}{L} dx$.
1 { Deze lading veroorzaakt in $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ een
3 { elektrisch veld van:

$$d\vec{E}^1(\vec{r}_0) = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$

$$= \frac{Q\,dx}{4\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{(x_0 - x,\ y_0,\ z_0)}{\left((x_0-x)^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{3/2}}$$

Integreren over x geeft achtereenvolgens:

3 {
$$E_x^1(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \int_0^L \frac{x_0 - x}{\left((x_0-x)^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{3/2}}\, dx$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \left[\frac{1}{\left((x_0-x)^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{1/2}} \right]_0^L$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_0-L)^2 + y_0^2 + z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right\}$$

3 {
$$E_y^1(\vec{r}_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \int_0^L \frac{y_0}{\left((x_0-x)^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{3/2}}\, dx$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} \int_{x_0}^{x_0 - L} \frac{-y_0}{\left(u^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^{3/2}}\, du, \quad \text{met: } u = x_0 - x$$

$$= \frac{-Q y_0}{4\pi\varepsilon_0 L} \left[\frac{u}{(y_0^2 + z_0^2)\sqrt{u^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right]_{x_0}^{x_0 - L}$$

$$= \frac{Q y_0}{4\pi\varepsilon_0 L (y_0^2 + z_0^2)} \left\{ \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} - \frac{x_0 - L}{\sqrt{(x_0-L)^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right\}$$

3 { Door hierin y_0 en z_0 te verwisselen vinden we:

$$E_z^1(\vec{r}_0) = \frac{Q z_0}{4\pi\varepsilon_0 L (y_0^2 + z_0^2)} \left\{ \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} - \frac{x_0 - L}{\sqrt{(x_0-L)^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right\}$$

1b

2 $\vec{E}^2$ volgt uit $\vec{E}^1$ door 90° linksom te roteren rond z, en vervolgens Q te vervangen door $-Q$.

10

5 Deze rotatie wordt beschreven door:

$$R\vec{r} = R(x,y,z) = (-y,x,z)$$

In de uitdrukkingen voor $\vec{E}^1$ moeten dan de volgende zaken veranderd worden:

$$Q \longmapsto -Q$$
$$x_0 \longmapsto y_0$$
$$y_0 \longmapsto -x_0$$
$$E^1_x \longmapsto E^2_y$$
$$E^1_y \longmapsto -E^2_x$$

Uitvoeren:

1 $$E^2_y = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left\{\frac{1}{\sqrt{(y_0-L)^2+(-x_0)^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{y_0^2+(-x_0)^2+z_0^2}}\right\}$$

1 $$-E^2_x = \frac{-Q\cdot(-x_0)}{4\pi\varepsilon_0 L((-x_0)^2+z_0^2)}\left\{\frac{y_0}{\sqrt{y_0^2+(-x_0)^2+z_0^2}} - \frac{y_0-L}{\sqrt{(y_0-L)^2+(-x_0)^2+z_0^2}}\right\}$$

1 $$E^2_z = \frac{-Qz_0}{4\pi\varepsilon_0 L((-x_0)^2+z_0^2)}\left\{\frac{y_0}{\sqrt{y_0^2+(-x_0)^2+z_0^2}} - \frac{y_0-L}{\sqrt{(y_0-L)^2+(-x_0)^2+z_0^2}}\right\}$$

Nu nog "opschonen":

$$E^2_x = \frac{Qx_0}{4\pi\varepsilon_0 L(x_0^2+z_0^2)}\left\{\frac{y_0-L}{\sqrt{x_0^2+(y_0-L)^2+z_0^2}} - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right\}$$

$$E^2_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left\{\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2+(y_0-L)^2+z_0^2}}\right\}$$

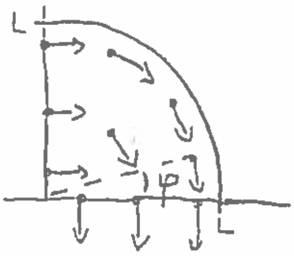
$$E^2_z = \frac{Qz_0}{4\pi\varepsilon_0 L(x_0^2+z_0^2)}\left\{\frac{y_0-L}{\sqrt{x_0^2+(y_0-L)^2+z_0^2}} - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right\}$$

1c | De gevraagde oppervlaktedipooldichtheid moet

10 voldoen aan:

2
$$\vec{\mu}\cdot\hat{n} = -\frac{P}{L} \quad \text{voor } x=0 \quad (A)$$
$$\vec{\mu}\cdot\hat{n} = +\frac{P}{L} \quad \text{voor } y=0 \quad (B)$$
$$\vec{\mu}\cdot\hat{n} = 0 \quad \text{voor } x^2+y^2=L^2 \quad (C)$$
$$-\operatorname{div}\vec{\mu} = 0 \quad \forall (x,y) \quad (D)$$

2 Het ligt voor de hand dat $\vec{\mu}$ in (x,y) de richting heeft van de raaklijn aan een cirkel door (x,y):



Omdat de equivalente poolverdeling $\vec{\mu}\cdot\hat{n}$ homogeen over de lijnstukken L moet zijn, mag $|\vec{\mu}|$ niet afhangen x of y.

1 In een punt $(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ voldoet een vorm als: $\boxed{\vec{\mu} = c(\sin\varphi, -\cos\varphi)}$ met c een nader te bepalen constante.

1 Voldoet dit aan A?:
bij $\varphi = \frac{\pi}{2}$ is $\vec{\mu} = c(1,0)$ en $\hat{n} = (-1,0)$
dan is $\vec{\mu}\cdot\hat{n} = -c$, dus we kiezen $\boxed{c = \frac{P}{L}}$.

1 Voldoet dit aan B?
bij $\varphi = 0$ is $\vec{\mu} = c(0,-1)$ en $\hat{n} = (0,-1)$
dan is $\vec{\mu}\cdot\hat{n} = c$, dus keuze $c = \frac{P}{L}$ houdt stand.

1 Voldoet dit aan C?
op de boog is $\hat{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$
dan is $\vec{\mu}\cdot\hat{n} = c(\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi) = 0$. In orde.

2 Voldoet dit aan D?
$$-\operatorname{div}\vec{\mu} = -\operatorname{div} c\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -c\left(\frac{y\cdot(-x)}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{(-x)(-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) = 0$$

Magnetisatie $\boxed{\vec{\mu} = \frac{P}{L}(\sin\varphi, -\cos\varphi)}$ voldoet aan alle eisen.

2a 1 In een geleider heerst overal een elektrisch veld van nul.

5

2 Stel: er bevindt zich een gebied V met netto lading binnen de geleider. Pas de wet van Gauss toe op de rand ∂V van dit gebied:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dO = \frac{Q_{omvat}}{\varepsilon_0}.$$

1 Omdat $\vec{E} = \vec{0}$ op ∂V, volgt $Q_{omvat} = 0$.

1 Er kan zich dus geen netto lading in V bevinden.

2b (i) 1 Kies een Gauss-oppervlak dat de holte precies omvat en verder geheel binnen de geleider ligt. Omdat

5

1 hier $\vec{E} = \vec{0}$ geldt opnieuw $Q_{omvat} = \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dO = 0$. O

1 Omdat nu $Q_{omvat} = q + \oint_{O_1} \sigma_1(\vec{r})\, dO = 0$ moet gelden dat $\oint_{O_1} \sigma_1(\vec{r})\, dO = -q$.

(ii) 1 In totaal bevindt er zich op de holle geleider een netto lading van $-q$. Maar deze zit al

1 op O_1, en in het binnenste kan zich geen lading bevinden. Blijft over op O_2: $\int_{O_2} \sigma_2(\vec{r})\, dO = 0$.

2c 1 In het inwendige van de geleider is $\vec{E} = \vec{0}$.

2 Dit veld ontstaat uit de superpositie van de velden van de ladingen q, σ_1 en σ_2. Voor O

2 het geval dat O_2 oneindig ver weg ligt, zorgen q en σ_1 er samen al voor dat $\vec{E} = \vec{0}$ in het gebied van de eindige geleider, want de invloed van lading op O_2 is dan verwaarloosbaar.

3 Deze σ_1 in combinatie met een ladingsverdeling σ_2 die overal op O_2 van de eindige geleider nul is, maakt dus het veld nul in het binnenste van de eindige geleider.

2 Omdat de ladingsverdeling op een geleider uniek is, moet dit de enige juiste ladingsverdeling zijn.

3a (10)

1 De strook wordt geparametriseerd door

1 $\vec{r} = (R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ z)$ waarin z de parameter

1 is. Een lijnelementje hiervan is $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dz}\,dz = (0,0,1)\,dz$.

Bereken eerst:

1
$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & dz \\ x_0 - R\cos\varphi & y_0 - R\sin\varphi & z_0 - z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\cdot\left(R\sin\varphi - y_0\right)dz - \hat{y}\cdot\left(R\cos\varphi - x_0\right)dz$$

Biot - Savart geeft:

2
$$d\vec{B}(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0\, dI_{strook}}{4\pi}\cdot\frac{(R\sin\varphi - y_0,\ x_0 - R\cos\varphi,\ 0)}{\left\{(x_0 - R\cos\varphi)^2 + (y_0 - R\sin\varphi)^2 + (z_0 - z)^2\right\}^{3/2}}\,dz$$

1 Nu is $dI_{strook} = K\,d\ell = KR\,d\varphi$. Integratie geeft:

1 $B_z(\vec{r}_0) = 0$.

1
$$B_x(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 KR\,d\varphi}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R\sin\varphi - y_0}{\left\{(x_0 - R\cos\varphi)^2 + (y_0 - R\sin\varphi)^2 + (z_0 - z)^2\right\}^{3/2}}\,dz$$

Schrijf: $u = z_0 - z$ en $a^2 = (x_0 - R\cos\varphi)^2 + (y_0 - R\sin\varphi)^2$:

1
$$B_x(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 KR\,d\varphi}{4\pi}(R\sin\varphi - y_0)\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{-du}{\left\{a^2 + u^2\right\}^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 KR\,d\varphi}{4\pi}(R\sin\varphi - y_0)\underbrace{\left[-\frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}}\right]_{+\infty}^{-\infty}}_{=\frac{2}{a^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 KR\,d\varphi}{2\pi}\cdot\frac{R\sin\varphi - y_0}{(x_0 - R\cos\varphi)^2 + (y_0 - R\sin\varphi)^2}$$

1 $B_y(\vec{r}_0)$ volgt door eenvoudig de factor $R\sin\varphi - y_0$ in de teller te vervangen door $x_0 - R\cos\varphi$:

$$B_y(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 KR\,d\varphi}{2\pi}\cdot\frac{x_0 - R\cos\varphi}{(x_0 - R\cos\varphi)^2 + (y_0 - R\sin\varphi)^2}$$

Dus $\vec{B}^{[\varphi,\varphi+d\varphi]} = (B_x, B_y, B_z)$ komt overeen met het gestelde.

3b (12)

4 Het vlak dat de z-as en het punt $\vec{r}_0$ bevat, is een spiegelsymmetrievlak van de stroomverdeling. Het magnetisch veld in $\vec{r}_0$ moet loodrecht op dit vlak staan en heeft dus alleen een component in de $\hat{\varphi}_0$-richting: $\vec{B}(\vec{r}_0) = f(\vec{r}_0)\hat{\varphi}_0$.

4 Omdat de cilinder oneindig lang is, verandert de stroomverdeling niet bij translatie langs z over willekeurige afstand. $\vec{B}(\vec{r}_0)$ kan dus niet van z afhangen. $\vec{B}(\vec{r}_0) = f(\rho_0, \varphi_0)\hat{\varphi}_0$.

4 De stroomverdeling is symmetrisch voor rotatie rond de z-as over willekeurige hoek. $\vec{B}(\vec{r}_0)$ hangt dus niet af van φ_0: $\boxed{\vec{B}(\vec{r}_0) = f(\rho_0)\hat{\varphi}_0}$

[Merk op dat het vlak $z = z_0$ een antisymmetrievlak is. $\vec{B}(\vec{r}_0)$ ligt dus in dit vlak: $\vec{B}(\vec{r}_0) = f(\vec{r}_0)\hat{\varphi}_0 + g(\vec{r}_0)\hat{\rho}_0$. Maar dit levert minder informatie op dan het symmetrievlak.]

3c (8)

2 Kies eerst een Ampère-lus passend bij de symmetrie: de cirkel $\vec{r} = (\rho_0\cos\varphi, \rho_0\sin\varphi, z_0)$ met $\varphi \in [0, 2\pi]$ en $\rho_0 > R$. Deze lus omvat een stroom

1 van $K \cdot 2\pi R$ in positieve zin volgens de rechterhandregel. Pas de wet van Ampère toe:

1 $$\oint_{\text{cirkel}} \vec{B}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{r} = 2\pi\mu_0 KR$$

1 Invullen: $d\vec{r} = \rho_0 d\varphi\, \hat{\varphi}_0$ en $\vec{B}(\vec{r}_0) = f(\rho_0)\hat{\varphi}_0$

1
$$\oint f(\rho_0)\hat{\varphi}_0 \cdot \hat{\varphi}_0\, \rho_0\, d\varphi = 2\pi\mu_0 KR$$
$$\Rightarrow f(\rho_0)\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\mu_0 KR$$
$$\Rightarrow f(\rho_0) = \frac{\mu_0 KR}{\rho_0} \qquad (\rho_0 > R)$$

1 Kies nu een cirkel met $\rho_0 < R$ en op gelijke wijze volgt:
$$f(\rho_0) = 0 \qquad (\rho_0 < R)$$

3d | De kracht op het deeltje moet dan nul zijn
(5) 1 en blijven. Omdat de kracht gegeven wordt
2 door $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ moet $\vec{v}$ parallel zijn aan $\vec{B}$.
(Of $\vec{B} = \vec{0}$, maar dat is buiten de cilinder nergens het geval.)

1 Omdat de $\vec{B}$-veldlijnen cirkels zijn zal $\vec{v}$ niet lang parallel aan $\vec{B}$ blijven, waarna de Lorentzkracht het zal doen afbuigen.

1 Het gevraagde is dus onmogelijk.