Hertentamen *Elektromagnetisme* (NS-112B)

dinsdag 4 juli 2017

13:30–16:30 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag gebruik maken van de gegevens in het formuleblad dat samen met het tentamen is uitgedeeld. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren.
  Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Het cijfer wordt bepaald door:

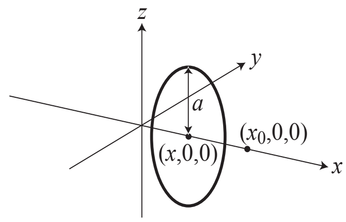
$$\frac{1}{10}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})$$

SUCCES!

1 Een geladen ring en een geladen cilinderoppervlak

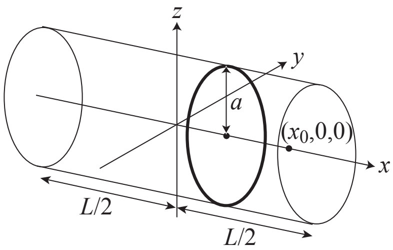
a: 8 b: 10 c: 12 (totaal: 30)

Beschouw een cirkelvormige ring met straal a, parallel aan het yz-vlak, en met $(x, 0, 0)$ als middelpunt. De ring is homogeen geladen, met lijnladingsdichtheid λ (een constante die wordt uitgedrukt in $\mathrm{C\,m^{-1}}$).



a. Toon aan dat geldt voor het elektrisch veld $\vec{E}^{\,\mathrm{ri}}$ van de ring in een punt $(x_0, 0, 0)$ op de x-as:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{ri}}(x_0,0,0) \;=\; \frac{\lambda\, a}{2\epsilon_0}\,\frac{(x_0 - x)}{\left\{a^2 + (x_0 - x)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\,\hat{x}$$

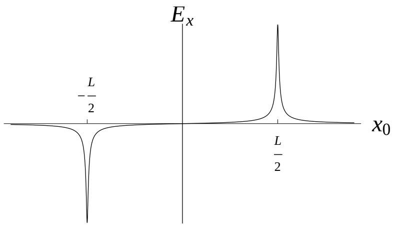


Beschouw nu een cilinderoppervlak met lengte L en straal a, waarvan de as op de x-as ligt. Het oppervlak loopt van $x = -\frac{L}{2}$ tot $x = \frac{L}{2}$, en is homogeen geladen met oppervlakteladingsdichtheid σ (een constante die wordt uitgedrukt in $\mathrm{C\,m^{-2}}$). Het elektrisch veld $\vec{E}^{\,\mathrm{co}}$ van het oppervlak in een punt $(x_0, 0, 0)$ op de x-as is te bepalen met gebruikmaking van het resultaat van onderdeel a).

Denk daartoe het cilinderoppervlak opgebouwd uit vele ringvormige lijnladingen met dikte $\mathrm{d}x$, en maak gebruik van het superpositiebeginsel.

b. Toon op de aangegeven manier aan dat geldt:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{co}}(x_0,0,0) \;=\; \frac{\sigma\, a}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(x_0 - \frac{L}{2}\right)^2}} \;-\; \frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2}}\right)\hat{x}$$



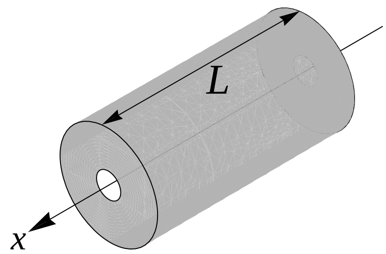
In de grafiek is voor een zeer lang cilinderoppervlak ($L = 200\,a$) de x-component van het elektrisch veld weergegeven als functie van de positie x_0 op de x-as. Voor punten op de as die ver genoeg verwijderd zijn van de uiteinden geldt dat het elektrisch veld praktisch nul is.

Voor een *oneindig* lang cilinderoppervlak geldt zelfs *exact* dat *overal* binnen het oppervlak het elektrisch veld nul is.

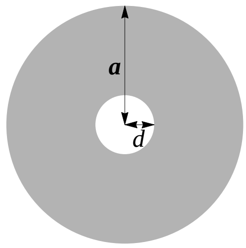
c. Toon met behulp van symmetrie-argumenten en de wet van Gauss aan dat het elektrisch veld van een homogeen geladen oneindig lang cilinderoppervlak overal binnen het oppervlak nul is.

2 Een uitgeholde cilindermagneet en ideale stroomspoelen

a: 5 b: 10 c: 10 (totaal: 25)



Cilindermagneet met holte



Vooraanzicht

Beschouw een cilindermagneet die massief is op een cilindervormige holte na. De magneet heeft lengte L en straal a. De straal van de holte, die concentrisch is met de as van de magneet, is d. De as van de cilinder ligt op de x-as, tussen $x = -\frac{1}{2}L$ en $x = +\frac{1}{2}L$. De magneet is homogeen gemagnetiseerd in de lengterichting. Er geldt dus in het gebied waar de magneet massief is voor de volumedipooldichtheid $\vec{\nu}$ (met ν_0 een constante die wordt uitgedrukt in $\mathrm{A\,m^{-1}}$):

$$\vec{\nu} \;=\; \nu_0\,\hat{x}$$

a. Leg met een eenvoudig symmetrie-argument uit dat het magnetisch veld *op de as van de holte* alleen een x-component heeft: $B_y(x,0,0) = B_z(x,0,0) = 0$.

b. Toon aan dat op de as van de holte het magnetisch veld ten gevolge van de uitgeholde magneet gegeven wordt door:

$$\vec{B}(x_0,0,0) \;=\; -\frac{1}{2}\,\mu_0\,\nu_0\left(\frac{x_0-\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2\,+\,\left(x_0-\frac{L}{2}\right)^2}} \;-\; \frac{x_0-\frac{L}{2}}{\sqrt{d^2\,+\,\left(x_0-\frac{L}{2}\right)^2}} \;-\; \frac{x_0+\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2\,+\,\left(x_0+\frac{L}{2}\right)^2}} \;+\; \frac{x_0+\frac{L}{2}}{\sqrt{d^2\,+\,\left(x_0+\frac{L}{2}\right)^2}}\right)\hat{x}$$

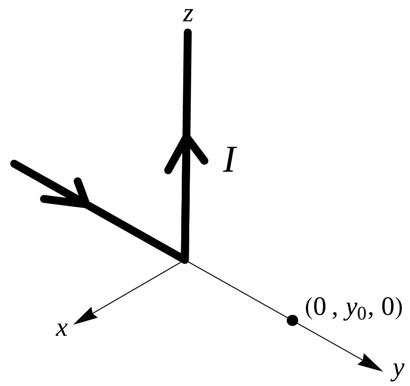
Hint: Bepaal eerst de equivalente poolverdeling van de uitgeholde magneet.

c. Het veld van de uitgeholde magneet is (buiten de magneet) hetzelfde als het veld van de combinatie van twee ideale stroomspoelen.
Beschrijf deze twee stroomspoelen: de vorm, de relatie tussen de grootte van de (oppervlakte)stroom en de constante ν_0, de richting waarin het oppervlak de stroom voert. Maak eventueel een verhelderende tekening.

3 Een stroomdraad met een knik

a: 15 b: 10 c: 10 (totaal: 35)

Een oneindig lange stroomdraad is in een knik gelegd en voert in de aangegeven richting een stroom I (een constante die wordt uitgedrukt in A). We kiezen het assenstelsel zodanig dat de draad ligt op de negatieve y-as en de positieve z-as. In deze opgave gaan we het magnetisch veld ten gevolge van deze stroomdraad bepalen in een punt $(0, y_0, 0)$ op de positieve y-as ($y_0 > 0$).

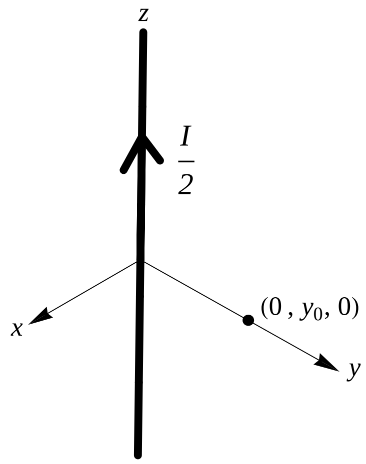


a. Toon aan, met gebruikmaking van de wet van Biot-Savart:

$$\vec{B}(0, y_0, 0) \;=\; -\frac{\mu_0 \, I}{4\pi \, y_0} \, \hat{x}$$

Gegeven: Een primitieve (naar u) van $\dfrac{1}{(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{u}{a^2\sqrt{u^2 + a^2}}$.

Het magnetisch veld op de positieve y-as kan ook met minder rekenwerk bepaald worden. Zo geldt dat in het punt $(0, y_0, 0)$ op de positieve y-as het magnetisch veld ten gevolge van de stroomdraad met een knik hetzelfde is als het magnetisch veld van een oneindig lange stroomdraad langs de z-as die in de richting van de positieve z-as een stroom $\frac{1}{2}I$ voert.



b. Leg uit, op basis van symmetrie-overwegingen en het superpositiebeginsel, dat het magnetisch veld van de draad met een knik (stroom I) in $(0, y_0, 0)$ hetzelfde is als het veld van de rechte stroomdraad langs de z-as (stroom $\frac{1}{2}I$).

Het magnetisch veld van de rechte stroomdraad langs de z-as (stroom $\frac{1}{2}I$) kan bepaald worden zonder gebruik te maken van de wet van Biot-Savart.

c. Bepaal met behulp van de wet van Ampère en symmetrie-overwegingen het magnetisch veld in het punt $(0, y_0, 0)$ ten gevolge van de rechte stroomdraad langs de z-as (stroom $\frac{1}{2}I$), en ga na dat op deze manier inderdaad hetzelfde resultaat gevonden wordt als bij onderdeel a).