Herkansing Elektromagnetisme
4 juli 2017

1a 2 Een lijnelementje in $\vec{r} = (x, a\cos\varphi, a\sin\varphi)$ 1 draagt een lading $dQ = \lambda|d\vec{r}| = \lambda|(0, -a\sin\varphi, a\cos\varphi)d\varphi|$ 1 $= \lambda a d\varphi$.

3 Deze lading veroorzaakt in $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$ een elektrisch veld van:

$$d\vec{E}^{ri}(\vec{r}_0) = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$

$$= \frac{\lambda a d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x_0 - x, -a\cos\varphi, -a\sin\varphi)}{((x_0-x)^2 + a^2)^{3/2}}$$

2 Integreren over φ geeft:

$$E_x^{ri}(\vec{r}_0) = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{(x_0 - x)d\varphi}{((x_0-x)^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x_0 - x}{((x_0-x)^2+a^2)^{3/2}}$$

1
$$E_y^{ri}(\vec{r}_0) = 0$$
$$E_z^{ri}(\vec{r}_0) = 0$$

b 2 Een dunne ring met dikte dx en oppervlakte-ladingsdichtheid σ kan gezien worden als een lijnlading met dichtheid $\lambda = \sigma dx$. Hiervan is het

4 elektrisch veld volgens (a):

$$\vec{E}^{ri}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma a \hat{x}}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x_0 - x}{((x_0-x)^2+a^2)^{3/2}} dx$$

4 Dit integreren we nu over x om het veld van de gehele cilinder te krijgen:

$$\vec{E}^{co}(\vec{r}_0) = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\hat{x} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{x_0 - x}{((x_0-x)^2 + a^2)^{3/2}} dx$$

$$= \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\hat{x} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+a^2}}\right]_{-L/2}^{+L/2}$$

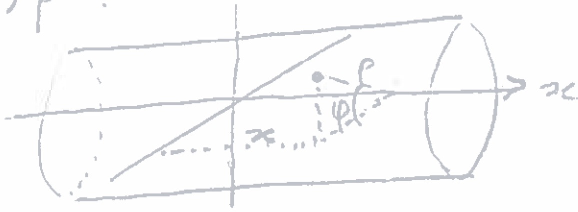
$$= \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x_0-\frac{L}{2})^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0+\frac{L}{2})^2+a^2}}\right)\hat{x}$$

c) 2 Een vlak door het veldpunt en door de as van de cilinder is een spiegelvlak van de ladings-verdeling. Het E-veld moet in dit spiegelvlak liggen en heeft dus geen $\hat{\varphi}$-component.

2 Voor een oneindige cilinder is elk vlak loodrecht door de cilinder een spiegelvlak. Het E-veld in punten van dit vlak moet weer in het vlak zijn gelegen en heeft dus ook geen x-component.
We schrijven dus $\vec{E}^{co}(\vec{r}) = E_\rho(\rho,\varphi,x)\,\hat{\rho}$.

1 Er is translatiesymmetrie voor translatie $// x$, dus $\vec{E}^{co}$ hangt niet af van x.

1 Er is rotatiesymmetrie rond de as van de cilinder, dus $\vec{E}^{co}$ hangt ook niet af van φ.
Dan geldt dus: $\vec{E}^{co}(\vec{r}) = E_\rho(\rho)\,\hat{\rho}$.



1 Kies nu een Gaussisch oppervlak in de vorm van een cilinder concentrisch met de ladingsverdeling, en met straal ρ en lengte ℓ. Het oppervlak wordt afgesloten door cirkelvormige "deksels" aan de uiteinden. De omvatte lading bedraagt 0, dus

2 volgens de wet van Gauss:

$$\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,d\mathcal{O} = \oint E_\rho(\rho)\,\hat{\rho}\cdot\hat{n}\,d\mathcal{O} = 0$$

1 Op beide deksels is $\hat{n} = \hat{x}$, dus de flux is nul.

1 Op de cilindermantel is $\hat{n} = \hat{\rho}$, dus:

$$\int_{\text{mantel}} E_\rho(\rho)\,\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}\,d\mathcal{O} = 0$$

1 Maar voor de mantel geldt ρ = constant dus

$$E_\rho(\rho)\int_{\text{mantel}} d\mathcal{O} = 0\,,$$

en daarom is $E_\rho(\rho) = 0$ en derhalve $\vec{E}^{co} = \vec{0}$.

2a 2 Elk vlak dat de as van de cilinder bevat is een spiegelvlak. In punten op de as moet het B-veld
2 dus in elk van die vlakken liggen. Dat kan alleen
1 als het veld langs de as gericht is.

b 2 De equivalente poolverdeling bestaat uit:
- een volumepoolverdeling $-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nu} = 0$
- een oppervlaktepoolverdeling $\vec{\nu}\cdot\hat{n} = \begin{cases} \nu_0\hat{x}\cdot\hat{x} = \nu_0 & \text{op } x = \frac{L}{2} \\ \nu_0\hat{x}\cdot(-\hat{x}) = -\nu_0 & \text{op } x = -\frac{L}{2} \end{cases}$

1 Beschouw eerst de opp.-poolverdeling op $x = \frac{L}{2}$.
Een elementje hiervan in $\vec{r} = (\frac{L}{2}, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ heeft een grootte $d\mathcal{O} = \rho d\rho d\varphi$. Dit veroorzaakt een B-veld
2 in een punt $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$ van:

$$d\vec{B}(x_0,0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\nu_0 d\mathcal{O}\,(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3}$$

$$= \frac{\mu_0\nu_0}{4\pi}\cdot\frac{(x_0-\frac{L}{2}, -\rho\cos\varphi, -\rho\sin\varphi)}{\{(x_0-\frac{L}{2})^2+\rho^2\}^{3/2}}\rho d\rho d\varphi$$

2 Integratie over het oppervlak geeft.

$$B_x(x_0,0,0) = \frac{\mu_0\nu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_d^a \frac{(x_0-\frac{L}{2})\rho}{\{(x_0-\frac{L}{2})^2+\rho^2\}^{3/2}}d\rho d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0\nu_0}{2}\cdot(x_0-\tfrac{L}{2})\int_d^a \frac{\rho d\rho}{\{(x_0-\frac{L}{2})^2+\rho^2\}^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0\nu_0}{2}\cdot(x_0-\tfrac{L}{2})\left[\frac{-1}{\sqrt{(x_0-\frac{L}{2})^2+\rho^2}}\right]_d^a$$

$$= -\frac{\mu_0\nu_0}{2}\left(\frac{x_0-\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+(x-\frac{L}{2})^2}} - \frac{x_0-\frac{L}{2}}{\sqrt{d^2+(x-\frac{L}{2})^2}}\right)$$

2 Het veld van de schijf op $x = -\frac{L}{2}$ volgt hieruit door $\frac{L}{2}$ te vervangen door $-\frac{L}{2}$ en ν_0 door $-\nu_0$.
1 Superpositie van de twee uitdrukkingen geeft:

$$B_x(x_0,0,0) = -\frac{\mu_0\nu_0}{2}\left(\frac{x_0-\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+(x_0-\frac{L}{2})^2}} - \frac{x_0-\frac{L}{2}}{\sqrt{d^2+(x_0-\frac{L}{2})^2}} - \frac{x_0+\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+(x_0+\frac{L}{2})^2}} + \frac{x_0+\frac{L}{2}}{\sqrt{d^2+(x_0+\frac{L}{2})^2}}\right)$$

c) 2 Volgens het equivalentieprincipe van Ampère bestaan de spoelen uit:

4 - een spoel met straal a, die samenvalt met de buitenmantel van de magneet en die per lengte-eenheid een stroom voert van $dI = M_0 dx$ in een richting volgens de rechterhandregel

4 - een spoel met straal d, die samenvalt met de rand van de holte en die een stroom voert in tegengestelde richting aan de eerste spoel.

Bovenaanzicht vanaf de positieve x-as:

3a) Biot - Savart : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$.

Gebruik superpositie van twee stukken :

3 { Stuk I : $(-\infty\,\hat{y}\,,\,0\,\hat{y}) \rightarrow d\vec{r} = \hat{y}\,dy\ ;\ \vec{r}_0 = y_0\,\hat{y}\ ;\ \vec{r} = y\,\hat{y}$

2 { Maar $d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \hat{y}\,dy \times (y_0 - y)\,\hat{y}$

$= dy\,(y_0 - y)\,\hat{y} \times \hat{y} = 0$ (geen bijdrage)

3 { Stuk II : $(0\,\hat{z}\,,\,\infty\,\hat{z}) \rightarrow d\vec{r} = \hat{z}\,dz\ ;\ \vec{r}_0 = y_0\,\hat{y}\ ;\ \vec{r} = z\,\hat{z}$

2 { Nu is $d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \hat{z}\,dz \times (y_0\,\hat{y} - z\,\hat{z})$

$= y_0\,dz\,(\hat{z} \times \hat{y}) - z\,dz\,(\hat{z} \cancel{\times} \hat{z})$

$= -\,y_0\,dz\,\hat{x}$.

2 { Dan is

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{-\,y_0\,dz}{(y_0^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{x}$$

3 { Integreren geeft :

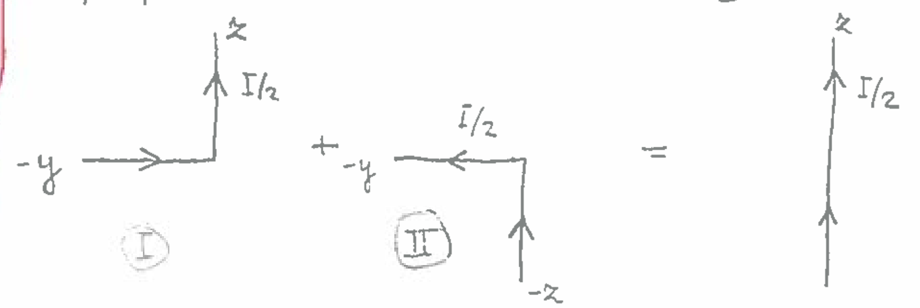
$$\vec{B} = -\,\frac{\mu_0 I\,y_0}{4\pi}\,\hat{x} \int_0^\infty \frac{dz}{(y_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\,\frac{\mu_0 I y_0}{4\pi}\,\hat{x} \left[\frac{z}{y_0^2 \sqrt{y_0^2 + z^2}} \right]_0^\infty$$

$$= -\,\frac{\mu_0 I y_0}{4\pi}\,\hat{x}\,\frac{1}{y_0^2}\,\lim_{z\to\infty} \frac{z}{\sqrt{y_0^2 + z^2}}$$

$$= -\,\frac{\mu_0 I}{4\pi\,y_0}\,\hat{x}$$

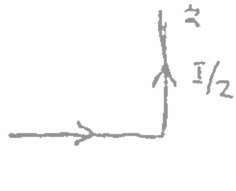
b) 4 { Superpositie maakt het volgende mogelijk :



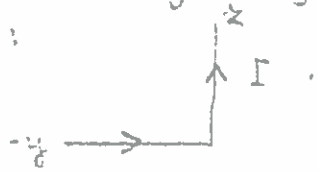
(Dit staat steeds voor: "het magneetveld van...")

2 { De stromen langs de y-as heffen elkaar op. De stromen langs de z-as zijn elkaars antigespiegelde in het xy-vlak. Dus het B-veld van de z-stroom van II is gelijk aan het B-veld van de z-stroom van I voor de punten in het spiegelvlak zoals punt $(0, y_0, 0)$. Dit betekent

2 dat de linkerkant van de symbolische vergelijking gelijk is aan: 2 maal

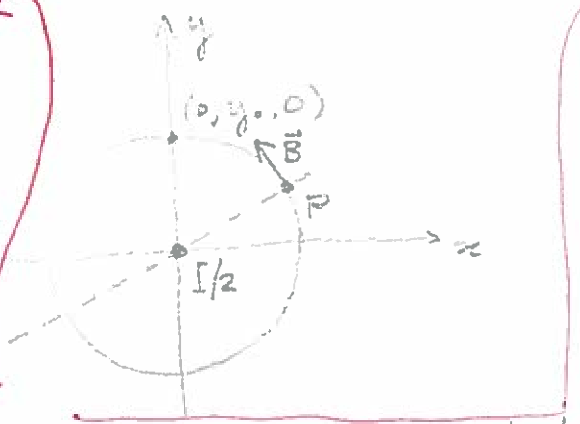


voor punten in het xy-vlak. Omdat verdubbelen van de stroom een verdubbeling van het B-veld teweeg brengt volgens Biot-Savart, is dit weer gelijk aan: 2



Hiermee is het gestelde bewezen.

c) Om de wet van Ampère toe te passen kiezen we een cirkelvormig integratiepad door punt $(0, y_0, 0)$ dat ligt in het xy-vlak: 2



Ieder vlak dat de z-as bevat is een symmetrievlak. Het gestippelde vlak is een voorbeeld. Het B-veld in punten in dit vlak moet er dus loodrecht op staan: Punt P bijvoorbeeld. 1

Rotatiesymmetrie rond de z-as leert dat $|\vec{B}|$ constant is langs het pad. 1

Conclusie: op het hele pad is $\vec{B}$ parallel aan een elementje $d\vec{l}$ van het pad: $\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl$, en B is er constant. 1

2 De wet van Ampère zegt:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I/2$$

(Let op dat we tegen de klok in integreren, zodat de stroom I positief genomen moet worden: rechterhand)

3

$$\Rightarrow \oint B\,dl = \mu_0 I/2$$

$$\Rightarrow B \oint dl = \mu_0 I/2$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi y_0 = \mu_0 I/2$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi y_0}$$ voor alle punten op de cirkel

In het bijzonder: $\vec{B}(0,y_0,0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y_0}\hat{x}$