Hertentamen *Elektromagnetisme* (NS-112B)

5 juli 2016

8:30–11:30 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag van de algemene gegevens hieronder en op de volgende pagina gebruik maken. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren.
  Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Het cijfer wordt bepaald door:

  $$\tfrac{1}{10}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})$$

SUCCES!

Algemene gegevens

$$\vec{F}^{\,\mathrm{el}}_{Q,\vec{R}\to q,\vec{r}} = \frac{Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntladingen)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{mag}}_{P,\vec{R}\to p,\vec{r}} = \frac{\mu_0\,P\,p}{4\pi}\,\frac{(\vec{r}-\vec{R}\,)}{|\vec{r}-\vec{R}\,|^3} \qquad \text{(wet van Coulomb voor puntpolen)}$$

$$\vec{E}^{\,q,\vec{r}}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(\vec{r}_0-\vec{r}\,)}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,|^3} \qquad \text{(veld puntlading)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{ext}\to q,\vec{r}} = q\,\vec{E}^{\,\mathrm{ext}}(\vec{r}\,) \qquad \text{(kracht op puntlading in extern veld)}$$

$$V^{q,\vec{r}}_{\infty}(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,|} \qquad \text{(potentiaal puntlading)}$$

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,V \qquad \text{(relatie elektrisch veld en potentiaal)}$$

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{l(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}\,)\cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \text{(relatie potentiaal en elektrisch veld)}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}O = \frac{Q_{\mathrm{omvat}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(wet van Gauss)}$$

Algemene gegevens (vervolg)

$$\vec{B}^{\,c}(\vec{r}_0) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\, I \oint_c \mathrm{d}\vec{r} \times \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}\,)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}\,|^3} \qquad \text{(wet van Biot-Savart)}$$

$$\vec{F}^{\,\mathrm{ext}\to c} \;=\; I \oint_c \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B}^{\,\mathrm{ext}}(\vec{r}\,) \qquad \text{(wet van Grassmann)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \mu_0\, I_{\mathrm{omvat}} \qquad \text{(wet van Ampère)}$$

$$\vec{F} \;=\; q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{(Lorentz-kracht)}$$

- $-\int_{l(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}\,) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ is de arbeid die (per eenheid van lading) verricht moet worden om een testlading, beginnend vanuit stilstand in $\vec{r}_1$, te verplaatsen langs het pad l, en tenslotte tot stilstand te brengen in $\vec{r}_2$.

- Juist aan de ene kant van een geladen oppervlak is het elektrisch veld anders dan juist aan de andere kant, maar een elektrische potentiaal sluit continu aan bij het oppervlak:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left\{ \vec{E}(\vec{r}_0 + \delta \hat{n}_0) \;-\; \vec{E}(\vec{r}_0 - \delta \hat{n}_0) \right\} \;=\; \frac{\sigma(\vec{r}_0)}{\epsilon_0}\, \hat{n}_0$$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left\{ V(\vec{r}_0 + \delta \hat{n}_0) \;-\; V(\vec{r}_0 - \delta \hat{n}_0) \right\} \;=\; 0$$

- De ladingsverdeling op een geleider is *uniek* bepaald.

- Voor een lijnmagneet langs de z-as, tussen $z = a$ en $z = b$ (waarbij $a < b$), met een lijn*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\kappa}(z) = \kappa(z)\ \hat{z}$, wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een lijn*pool*verdeling met dichtheid $-\kappa'(z)$, een punt*pool* in $(0, 0, b)$ met *pool*sterkte $\kappa(b)$ en een punt*pool* in $(0, 0, a)$ met *pool*sterkte $-\kappa(a)$.

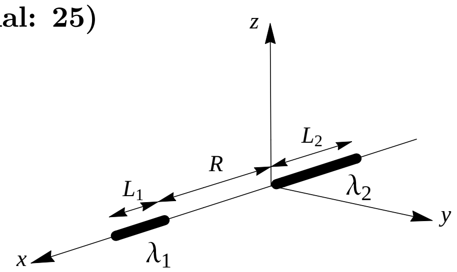
- Voor een platte twee-dimensionale magneet met een oppervlakte*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\mu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een oppervlakte*pool*verdeling met dichtheid $-\operatorname{div} \vec{\mu}$ en een lijn*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\mu} \cdot \hat{n}$.

- Voor een drie-dimensionale magneet met een volume*dipool*verdeling met dichtheid $\vec{\nu}$ wordt de equivalente poolverdeling gegeven door de combinatie van een volume*pool*verdeling met dichtheid $-\operatorname{div} \vec{\nu}$ en een oppervlakte*pool*verdeling over de rand met dichtheid $\vec{\nu} \cdot \hat{n}$.

- Equivalentieprincipe van Ampère: een dunne magneet met (effectieve) oppervlaktedipooldichtheid $I\, \hat{n}$ is magnetisch equivalent aan een stroomkring in de vorm van de rand van de magneet die een stroom I voert in de richting die via de rechterhandregel gerelateerd is aan $\hat{n}$.

1 De kracht tussen twee geladen staafjes

a: 4 b: 8 c: 8 d: 5 (totaal: 25)



Twee homogeen geladen staafjes liggen vast op de x-as. Staafje 1 ligt tussen $x = R$ en $x = R + L_1$; staafje 2 ligt tussen $x = -L_2$ en $x = 0$. De lijnladingsdichtheden van de staafjes zijn λ_1 resp. λ_2. In deze opgave gaan we de elektrische kracht tussen de staafjes bepalen.

We beginnen met een schatting van de kracht voor het geval de staafjes ver van elkaar verwijderd zijn ($R \gg L_1$ en $R \gg L_2$).

a. Leg uit (zonder ingewikkelde berekeningen) dat voor $R \gg L_1$ en $R \gg L_2$ de kracht van staafje 1 op staafje 2 ongeveer gegeven wordt door:

$$\vec{F}_{1\to 2} \simeq -\frac{L_1\,L_2 \lambda_1\,\lambda_2}{4\pi\epsilon_0\,R^2}\,\hat{x} \tag{1}$$

We gaan nu over tot de exacte bepaling van de kracht van staafje 1 op staafje 2. Als tussenstap bepalen we eerst het elektrische veld van staafje 1.

b. Toon aan dat geldt voor het elektrische veld $\vec{E}_1$ ten gevolge van staafje 1 in een punt $(x_0, 0, 0)$ op de negatieve x-as ($x_0 \leq 0$):

$$\vec{E}_1(x_0, 0, 0) = -\frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R - x_0} - \frac{1}{R + L_1 - x_0}\right)\hat{x}$$

c. Toon aan dat geldt voor de kracht $\vec{F}_{1\to 2}$ van staafje 1 op staafje 2:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\ln\left(1 + \frac{L_2}{R}\right) - \ln\left(1 + \frac{L_2}{R+L_1}\right)\right\}\hat{x} \tag{2}$$

In onderdeel d) gaat u aantonen dat uit (2) volgt:

$$\vec{F}_{1\to 2} = \\ = -\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{L_1}{R}\frac{L_2}{R} + \text{termen met minstens drie producten van } \frac{L_1}{R} \text{ en/of } \frac{L_2}{R}\right\}\hat{x} \tag{3}$$

Hieruit zien we dat voor $R \gg L_1$ en $R \gg L_2$ de exacte uitdrukking (2) inderdaad in goede benadering gegeven wordt door (1).

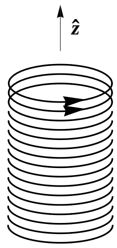
d. Toon (3) aan.
Gegevens: U mag zonder bewijs gebruik maken van de volgende taylorontwikkelingen:

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \text{termen } x^3 \text{ en hoger}$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \text{termen } x^3 \text{ en hoger}$$

2 Een stroomspoel met rechthoekige windingen

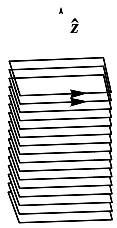
totaal: 25

Een oneindig lange stroomspoel bestaat uit zeer dicht opeen liggende cirkelvormige windingen. De spoel voert in de aangegeven richting een stroom I. Er geldt dan voor het magnetische veld van de spoel, met n het aantal windingen per meter:



$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \, n \, I \, \hat{z} & \text{binnen de spoel} \\ \vec{0} & \text{buiten de spoel} \end{cases}$$

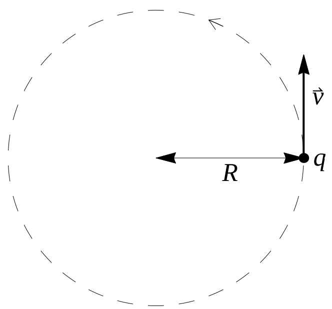
Beschouw nu een oneindig lange stroomvoerende spoel waarvan de windingen niet cirkelvormig zijn, maar *rechthoekig*.



Ga na, met gebruikmaking van symmetrie-overwegingen en de wet van Ampère, in hoeverre het bovenstaande resultaat ook geldt voor het magnetische veld van de oneindig lange spoel met *rechthoekige* windingen.
Gegeven: U mag zonder bewijs gebruik maken van het feit dat oneindig ver verwijderd van de spoel het magnetische veld nul is.
Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

3 Een geladen deeltje in een magnetisch veld

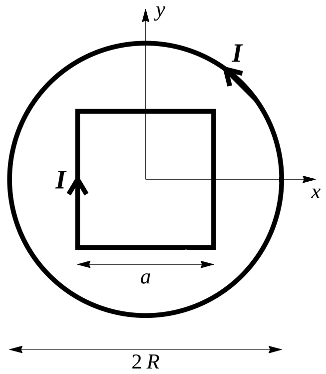
totaal: 10



Een deeltje met lading $q > 0$ en massa m heeft op een gegeven moment een snelheid $\vec{v}$. Door vervolgens een magnetisch veld aan te leggen, wil men het deeltje in de aangegeven richting een cirkel met straal R eenparig laten doorlopen. Op het deeltje werken geen andere krachten dan de kracht ten gevolge van het magnetisch veld.
Bepaal de grootte en de richting van het magnetisch veld dat men daartoe moet aanleggen.

4 Een systeem van twee stroomkringen

a: 10 b: 15 c: 5 (totaal: 30)



Een systeem van twee stroomkringen bestaat uit een stroomkring in de vorm van een cirkel met straal R en een stroomkring in de vorm van een vierkant met zijde a. De kringen voeren in de aangegeven richtingen een stroom I. We kiezen het assenstelsel zo, dat de kringen in het xy-vlak liggen met hun middelpunten in de oorsprong. We gaan allereerst van dit systeem het magnetische veld op de z-as bepalen.

a. Leg met symmetrie-argumenten uit:

   (i) dat in punten op de z-as het magnetische veld langs de z-as gericht is;

   (ii) dat in punten op de z-as de vier zijden van het vierkant dezelfde bijdrage geven aan de z-component van het magnetische veld.

   Let op: U hoeft de symmetrieregels die u gebruikt niet eerst af te leiden. Maar geef wel steeds precies aan van welke regels u gebruik maakt in uw redenering.

b. Toon met behulp van de wet van Biot-Savart aan dat op de z-as geldt voor het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{sys}}$ van het systeem van de twee stroomkringen:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{sys}}(0,0,z) \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi}\, I \left\{ \frac{\pi R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2}{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)\sqrt{z^2+\frac{a^2}{2}}} \right\} \hat{z}$$

   Gegeven: Een primitieve (naar x) van $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

c. Er bestaat een dunne platte magneet die (buiten de magneet) hetzelfde magnetische veld geeft als het systeem van de twee stroomkringen.
   Maak een tekening van deze magneet, waarin u de vorm van de magneet aangeeft en ook de grootte en de richting van de magnetisatie. Licht uw tekening kort toe.