Herkansing Elektromagnetisme 5 juli 2016

1a) Voor $R >> L_1, L_2$ kunnen de staafjes worden opgevat als puntladingen. Hiervoor geldt de wet van Coulomb:

2

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q\,Q\,(\vec{r}-\vec{R})}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{R}|^3}$$

Nu is $q = \lambda_1 L_1$

$Q = \lambda_2 L_2$

$\vec{r}-\vec{R} = (0,0,0) - (R,0,0) = -R\hat{x}$

2

Dus:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 L_1 L_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\hat{x}$$

b) Voor het elektrisch veld van een lijnstukje dx met lading $\lambda_1 dx'$ gelegen in punt $(x,0,0)'$ geldt de wet van Coulomb:

4

$$d\vec{E}_1(x_0,0,0) = \frac{\lambda_1 dx \,(x_0 - x, 0, 0)}{4\pi\varepsilon_0 |(x_0 - x, 0, 0)|^3} \quad 2$$

$$= \frac{-\lambda_1 dx}{4\pi\varepsilon_0 (x_0-x)^2}\,\hat{x} \qquad (\text{want } x_0 < x)$$

Dit moeten we integreren over lijnstuk 1.

2

$$\vec{E}_1(x_0,0,0) = -\int_R^{R+L_1} \frac{\lambda_1 dx}{4\pi\varepsilon_0 (x_0-x)^2}\,\hat{x}$$

2

$$= \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{x}\left[-\frac{1}{x_0-x}\right]_R^{R+L_1}$$

$$= -\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{x}\left(\frac{1}{x_0-R-L_1} - \frac{1}{x_0-R}\right)$$

$$= -\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{x}\left(\frac{1}{R-x_0} - \frac{1}{R+L_1-x_0}\right)$$

c) Een lijnstukje dx gelegen in $(x,0,0)'$ heeft een lading $\lambda_2 dx'$ en ondervindt een kracht van

3

$$d\vec{F}_{1\to 2} = \vec{E}_1(x,0,0)\,\lambda_2 dx \; !$$

De totale kracht op lijnlading 2 volgt dan uit:

2

$$\vec{F}_{1\to 2} = \lambda_2 \int_{-L_2}^{0} \vec{E}_1(x,0,0)\,dx$$

1

$$= -\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{x}\int_{-L_2}^{0}\left(\frac{1}{R-x} - \frac{1}{R+L_1-x}\right)dx$$

$$= -\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{x}\left[-\ln(R-x)+\ln(R+L_1-x)\right]_{-L_2}^{0}$$

2

$$= -\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{x}\left\{-\ln R+\ln(R+L_2)+\ln(R+L_1)-\ln(R+L_1+L_2)\right\}$$

$$= -\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{x}\left\{\ln\left(1+\frac{L_2}{R}\right)-\ln\left(1+\frac{L_2}{R+L_1}\right)\right\}$$

d) $\frac{L_1}{R}$ en $\frac{L_2}{R}$ zijn beide $\ll 1$. Voor de eerste term in (2)

2 kunnen we direct benaderen met:

$$(*) \quad \ln\left(1+\frac{L_2}{R}\right)=\frac{L_2}{R}-\frac{1}{2}\left(\frac{L_2}{R}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{L_2}{R}\right)^3\right)$$

De tweede term schrijven we eerst als

$$\frac{L_2}{R+L_1}=\frac{L_2}{R}\left(\frac{1}{1+L_1/R}\right)=\frac{L_2}{R}\left(1-\frac{L_1}{R}+\left(\frac{L_1}{R}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{L_1}{R}\right)^3\right)\right)$$

2

Hiermee vinden we:

$$(**) \quad \ln\left(1+\frac{L_2}{R+L_1}\right)=\frac{L_2}{R+L_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{L_2}{R+L_1}\right)^2+\text{hogere termen}$$

$$=\frac{L_2}{R}\left(1-\frac{L_1}{R}+\left(\frac{L_1}{R}\right)^2+\text{h.t.}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{L_2}{R}\right)^2\left(1-\frac{L_1}{R}+\left(\frac{L_1}{R}\right)^2+\text{h.t.}\right)^2+\ldots$$

$$=\frac{L_2}{R}-\frac{L_1L_2}{R^2}-\frac{1}{2}\frac{L_2^2}{R^2}+\text{h.t.}$$

Nu nemen we (*) en (**) samen en vinden:

$$\ln\left(1+\frac{L_2}{R}\right)-\ln\left(1+\frac{L_2}{R+L_1}\right)=\cancel{\frac{L_2}{R}}-\cancel{\frac{L_2^2}{2R^2}}-\left(\cancel{\frac{L_2}{R}}-\frac{L_1L_2}{R^2}-\cancel{\frac{L_2^2}{2R^2}}\right)+\text{h.t.}$$

1

$$=\frac{L_1L_2}{R^2}+\text{termen met 3 factoren }\frac{L}{R}.$$

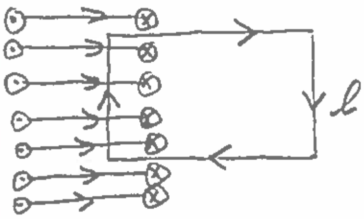
Substitutie in (2) geeft direct:

$$\vec{F}_{1\to 2}=-\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{L_1L_2}{R^2}\hat{x}$$

en dit is gelijk aan (1).

2) 6 Elk vlak loodrecht op de spoel is een spiegelvlak. Het B-veld in ieder punt van het vlak staat loodrecht op het vlak. Het veld is dus overal langs de z-as gericht. 3
Translatiesymmetrie langs z geeft dat B niet van z afhangt. 3

5 Kies nu een rechthoekig Ampèrepad dat binnen de spoel een stukje langs de z-as loopt met lengte ℓ:



4 Dit pad omvat een hoeveelheid stroom $+n\ell I$. De wet v. Ampère luidt
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 n \ell$$

2 Het stuk binnen de spoel is: $\int \vec{B}\cdot d\vec{r} = \int B\,dz = B\int dz = B\ell$.

2 De stukken loodrecht op de spoel dragen niet bij omdat daar $\vec{B}\perp d\vec{r}$.

2 Het vertikale stuk buiten de spoel geeft $\int \vec{B}\cdot d\vec{r} = -B_{buiten}\,\ell$, maar omdat we dit oneindig ver van de spoel kunnen leggen, waar $B_{buiten}=0$, levert dit stuk ook geen bijdrage. Blijft over:

4 $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = B\ell = \mu_0 n \ell I \implies B = \mu_0 n I \text{ en dus } \vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}.$$
Het veld is dus identiek aan dat van de ronde spoel.

3) 3 Om een cirkelbaan te gaan beschrijven moet de Lorentzkracht op de lading centripetaal zijn, dus naar het middelpunt gericht.

2 Deze kracht is: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$.

2 Met de rechterhandregel vinden we dat $\vec{B}$ dan het papier <u>in</u> moet zijn gericht. Het veld moet homogeen zijn.

1 De grootte van de kracht is $F = qvB$ omdat $\vec{v}\perp\vec{B}$.

1 Omdat hij centripetaal is geldt ook $F = \frac{mv^2}{R}$. Gelijkstellen

2 en oplossen naar B geeft:
$$B = \frac{mv}{qR}.$$

4 a (i) Bij spiegeling in het vlak $x=0$ of het vlak $y=0$ blijven de stroomkringen gelijk, maar keert elke stroom I van richting om. Dit zijn dus antisymmetrievlakken. Het $\vec{B}$-veld voor punten in deze vlakken is gericht in de vlakken. Punten op de z-as hebben dus een $\vec{B}$-veld dat in beide vlakken ligt : parallel aan z.

5

(ii) Bij rotatie rond de z-as over een hoek van $\frac{\pi}{2}$ wordt elk recht stuk getransformeerd in één van de andere rechte stukken. De bijbehorende velden $\vec{B}^{rs}$ draaien dus over $\frac{\pi}{2}$ mee. De z-component hiervan blijft onveranderd bij deze rotatie en is dus gelijk voor elk van de vier stukken.

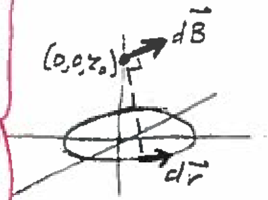
5

b) Het veld is de superpositie van de velden van de cirkel $\vec{B}^c$ en de 4 lijnstukken. Voor de z-componenten geldt dus

3

$$\vec{B}^{sys}(0,0,z) = \left(B_z^c(0,0,z) + 4B_z^{rs}(0,0,z)\right)\hat{z}$$

cirkel :



5

$$\vec{r} = (R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ 0) \quad 1$$

$$\vec{r}_0 = (0,0,z_0) \quad 1$$

$$d\vec{r} = (-R\sin\theta,\ R\cos\theta,\ 0)\,d\theta \quad 1$$

$$d\vec{r}\times(\vec{r}_0-\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ -R\cos\theta & -R\sin\theta & z_0 \end{vmatrix} d\theta$$

$$= \left(\hat{x}\, z_0 R\cos\theta + \hat{y}\, z_0 R\sin\theta + \hat{z} R^2\right) d\theta \quad 2$$

Biot - Savart :

5

$$d\vec{B}^c = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{d\vec{\ell}\times(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{(z_0R\cos\theta,\ z_0R\sin\theta,\ R^2)\,d\theta}{(R^2+z_0^2)^{3/2}}$$

3

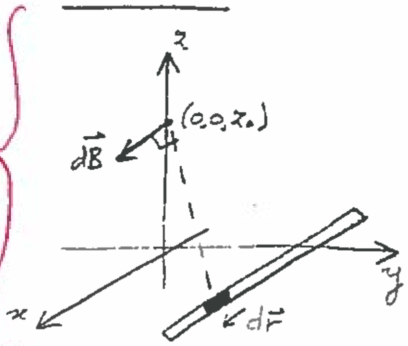
$$\vec{B}^c = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{z}\int_0^{2\pi}\frac{R^2\,d\theta}{(R^2+z_0^2)^{3/2}}$$

(x- en y-componenten worden nul.)

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\hat{z}\,\frac{R^2}{(R^2+z_0^2)^{3/2}}$$

lijnstuk:

5



$$\vec{r} = \left(x, \tfrac{a}{2}, 0\right) \qquad \vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$$

$$d\vec{r} = (1, 0, 0)\, dx$$

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & -\frac{a}{2} & z_0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot \hat{x} - z_0\, dx\, \hat{y} - \tfrac{a}{2}\, dx\, \hat{z}$$

2

5

$$d\vec{B}^{rs} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\left(0, -z_0, -\frac{a}{2}\right) dx}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z_0^2\right)^{3/2}}$$

We hebben alleen de z-component nodig:

3

$$B_z^{rs} = -\frac{\mu_0 I a}{8\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{a^2}{4} + z_0^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{8\pi} \left[\frac{x}{\left(\frac{a^2}{4} + z_0^2\right)\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4} + z_0^2}} \right]_{-a/2}^{+a/2}$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{8\pi} \cdot \frac{a}{\left(\frac{a^2}{4} + z_0^2\right)\sqrt{z_0^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

totaal:

$$\vec{B}_z^{sys}(0,0,z_0) = \left(B_z^c + 4 B_z^{rs}\right)\hat{z}$$

1

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{\pi R^2}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + z_0^2\right)\sqrt{z_0^2 + \frac{a^2}{2}}} \right\} \hat{z}$$

c) Volgens het equivalentieprincipe van Ampère het magneetveld
2 van de kringen gelijk aan dat van een platte magneet die
loodrecht op het vlak van de kring gemagnetiseerd is. In dit
2 geval dan een ronde magneet met een vierkant gat. De magnetisatie is omhoog gericht volgens de rechterhandregel.

1