Tentamen *Elektromagnetisme* (NS-112B)

dinsdag 9 april 2019

13:30–16:30 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag gebruik maken van de gegevens in het formuleblad dat samen met het tentamen is uitgedeeld. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren.
  Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Het cijfer wordt bepaald door:

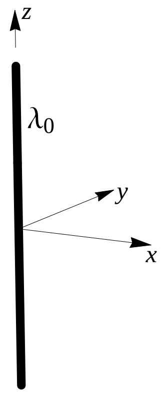
$$\tfrac{1}{10}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})$$

SUCCES!

1 De kracht van een geladen draad op een geladen staafje

a: 10 b: 4 c: 4 d: 2 (totaal: 20)

Een zeer lange en dunne draad is homogeen geladen. Gemakshalve vatten we de draad op als oneindig lang, met lijnladingsdichtheid λ_0 (een grootheid die wordt uitgedrukt in C/m). We kiezen het assenstelsel zodanig dat de draad samenvalt met de z-as.

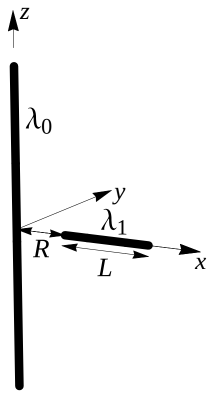


a. Toon met behulp van Coulombintegratie aan dat geldt voor het elektrisch veld $\vec{E}^{\,\mathrm{draad}}$ van de draad in het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{E}^{\,\mathrm{draad}}(\vec{r}_0) \;=\; \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\left(x_0^2+y_0^2\right)}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Gegeven</u>: Een primitieve (naar u) van $\frac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$.

Een zeer dun staafje heeft een lengte L, en is homogeen geladen met lijnladingsdichtheid λ_1 (ook een grootheid die wordt uitgedrukt in C/m). Het staafje wordt gelegd langs de x-as, tussen $x = R$ en $x = R + L$.
We nemen aan dat de draad en het staafje *perfecte isolatoren* zijn, dus dat ze elkaars ladingsverdelingen *niet* beïnvloeden. Verder worden de draad en het staafje op hun plaats gehouden.
Later in de opgave gaan we de kracht van de draad op het staafje berekenen. Geef voorafgaand aan de formele berekeningen eerst uw beargumenteerde verwachting in het geval de lengte van het staafje zeer veel kleiner is dan de afstand tot de draad.



b. Beschouw het geval dat de lengte van het staafje zeer veel kleiner is dan de afstand tot de draad ($L \ll R$). Wat verwacht u dan voor de grootte van de kracht van de draad op het staafje? Licht uw antwoord toe.

c. Toon met behulp van een berekening aan dat geldt voor de kracht van de draad op het staafje:

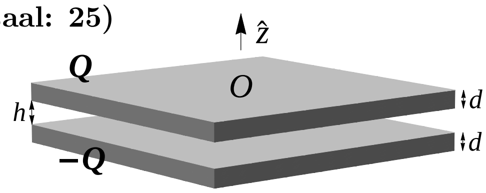
$$\vec{F} \;=\; \frac{\lambda_0\,\lambda_1}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(1 + \frac{L}{R}\right)\hat{x}$$

d. Bepaal met behulp van Taylor-ontwikkeling de leidende term van de kracht $\vec{F}$ voor het geval $L \ll R$, en controleer uw verwachting bij onderdeel b).
<u>Gegeven</u>: U mag zonder bewijs gebruiken: $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}\left(x^2\right)$.

2 Een plaatcondensator

a: 8 d: 8 c: 4 d: 5 (totaal: 25)

Een zeer grote plaatcondensator bestaat uit twee identieke geleidende platen, elk met een oppervlakte O en een dikte d. De platen zijn parallel aan elkaar geplaatst op een afstand h.

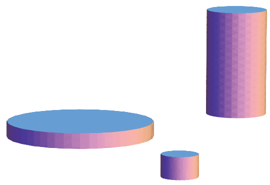


De totale lading op de bovenste plaat is Q, en de totale lading op de onderste $-Q$. We kiezen het assenstelsel zodanig dat de platen evenwijdig zijn aan het xy-vlak.

We maken de volgende twee aannames:

- De platen zijn zo groot, dat we op grond van symmetrie-overwegingen kunnen stellen dat het elektrisch veld $\vec{E}^{\text{sys}}$ van dit systeem van geleidende platen overal in de (positieve of negatieve) z-richting wijst, en bovendien onafhankelijk is van de horizontale positie:
$$\vec{E}^{\text{sys}}(x, y, z) \;=\; f(z)\;\hat{z}$$
Hierbij is f een nog onbepaalde functie.
- Het veld op grote afstand van de platen bedraagt nul.

In deze opgave gaat u, door toepassing van de wet van Gauss, conclusies trekken over het elektrisch veld $\vec{E}^{\text{sys}}$ en de ladingsverdeling over de platen.



Kies bij de toepassing van de wet van Gauss steeds Gaussische oppervlakken in de vorm van een *gesloten* oppervlak bestaande uit een cilinderwand, een deksel en een bodem. U mag zelf de straal en de lengte van de Gaussische oppervlakken kiezen alsmede hun positionering in de ruimte.

a. Toon onder de bovengenoemde aannames aan, door toepassing van de wet van Gauss op geschikt gekozen Gaussische oppervlakken in de vorm van een gesloten oppervlak bestaande uit een cilinderwand, een deksel en een bodem:

   (i) Tussen de platen is het elektrisch veld $\vec{E}^{\text{sys}}$ overal hetzelfde (dezelfde grootte en richting).

   (ii) Boven de bovenste plaat en onder de onderste plaat bedraagt het elektrisch veld $\vec{E}^{\text{sys}}$ overal nul.

Behalve over het elektrisch veld, zijn ook conclusies te trekken over de manier waarop de lading verdeeld is over de geleiders. Zoals bekend bevindt zich in het inwendige van de geleidende platen nergens netto lading. Eventuele lading bevindt zich dus op de bovenrand of op de onderrand van de geleidende platen. Hierover zijn nog specifiekere conclusies te trekken.

b. Toon aan, met behulp van de voorgaande resultaten en de wet van Gauss (en algemene eigenschappen van geleiders):

   (i) Op de bovenrand van de bovenste plaat en op de onderrand van de onderste plaat bevindt zich nergens netto lading.

   (ii) Zowel over de onderrand van de bovenste plaat als over de bovenrand van de onderste plaat is de lading gelijkmatig verdeeld.

Er volgt nu dat de oppervlakteladingsdichtheid op de onderrand van de bovenste plaat gegeven wordt door $\frac{Q}{O}$, en oppervlakteladingsdichtheid op de bovenrand van de onderste plaat door $-\frac{Q}{O}$.

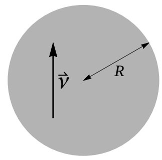
c. Toon aan, nogmaals met behulp van de wet van Gauss, dat geldt voor het elektrisch veld $\vec{E}^{\text{sys}}$ tussen de platen:
$$\vec{E}^{\text{sys}} = -\frac{Q}{\epsilon_0\, O}\,\hat{z}$$

d. Bepaal de capaciteit van de plaatcondensator.
<u>Gegeven</u>: De capaciteit van een condensator wordt gegeven door $C = \frac{Q}{V}$, met V het potentiaalverschil tussen de platen.

3 Een bolmagneet

a: 3 b: 6 c: 6 (totaal: 15)

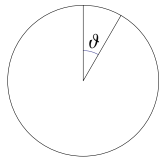
Een bolmagneet heeft straal R en is homogeen gemagnetiseerd in wat we de positieve z-richting noemen, met volumedipooldichtheid :



$$\vec{\nu} \;=\; \nu_0\,\hat{z}$$

Hierbij is ν_0 een constante die wordt uitgedrukt in de eenheid A/m.

a. Leg uit dat de equivalente poolverdeling van de bolmagneet bestaat uit een oppervlakte*pool*verdeling over het boloppervlak, met oppervlakte*pool*dichtheid:



$$\nu_0 \cos\vartheta$$

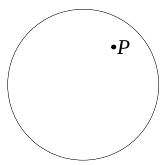
Hierbij is ϑ de hoek met de positieve z-as.

Voor het magnetisch veld $\vec{B}^{\,\mathrm{ep}}$ van de equivalente poolverdeling geldt, en hiervan mag u zonder bewijs in de rest van de opgave gebruik maken:

$$\vec{B}^{\,\mathrm{ep}} \;=\; \begin{cases} -\frac{1}{3}\mu_0\,\nu_0\,\hat{z} & \text{binnen het boloppervlak } (r < R) \\[2ex] \frac{1}{3}\mu_0\,\nu_0\,\dfrac{R^3}{r^3}\begin{pmatrix} 3\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \\ 3\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \\ 3\cos^2\vartheta \,-\, 1 \end{pmatrix} & \text{buiten het boloppervlak } (r > R) \end{cases}$$

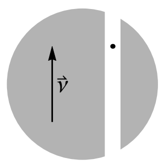
Hiermee weten we dus ook wat het magnetisch veld $\vec{B}^{\,\mathrm{bol}}$ is van de bolmagneet buiten de bolmagneet, namelijk hetzelfde als dat van de equivalente poolverdeling buiten het boloppervlak:

$$\text{voor } r > R\text{:} \quad \vec{B}^{\,\mathrm{bol}} \;=\; \frac{1}{3}\mu_0\,\nu_0\,\frac{R^3}{r^3}\begin{pmatrix} 3\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \\ 3\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \\ 3\cos^2\vartheta \,-\, 1 \end{pmatrix}$$

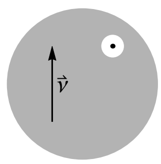


Over het magnetisch veld *in* de bolmagneet, bijvoorbeeld in het punt P, valt niet ondubbelzinnig iets te zeggen. Het hangt er maar van af op welke manier ruimte vrijgemaakt wordt rond het punt P om het veld ter plekke te kunnen meten.
In deze opgave beschouwen we *twee* verschillende manieren om ruimte vrij te maken rond het punt P:

(i) Op de eerste manier wordt een smalle cilindrische schacht uitgeboord, parallel aan de magnetisatie $\vec{\nu}$. In de figuur is een doorsnede ter plekke van P weergegeven. Bedenk echter dat de rest van de magneet de dunne uitgeboorde schacht geheel omhult.



(ii) Op de tweede manier wordt een bolletje weggesneden rond het punt P. In de figuur is een dwarsdoorsnede ter hoogte van P weergegeven. Bedenk dat de rest van de magneet het weggesneden bolletje geheel omhult.



In beide gevallen beschouwen we de limiet dat de vrijgemaakte ruimte zeer klein is. Dus in geval (i) wordt een zeer smalle cilindrische schacht uitgeboord, en in geval (ii) een zeer klein bolletje weggesneden.

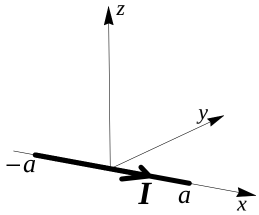
b. In één van de twee beschouwde gevallen wordt (in de limiet dat de vrijgemaakte ruimte zeer klein is) in punt P hetzelfde magnetisch veld gemeten als dat van de equivalente poolverdeling, dus $-\frac{1}{3}\mu_0\,\nu_0\,\hat{z}$.
Leg uit om welk van de twee gevallen het gaat.

c. Bepaal ook het veld in het punt P voor het andere geval (in de limiet dat de vrijgemaakte ruimte zeer klein is).
Licht uw antwoord toe.

4 Een stroomkring en een equivalente magneet

a: 8 b: 4 c: 5 d: 5 e: 2 f: 6 (totaal: 30)

Een stuk stroomvoerende draad, gelegen langs wat we de x-as noemen, tussen $x = -a$ en $x = a$, voert in de aangegeven richting een stroom I. Uiteraard komt zo'n stuk stroomdraad niet 'los' voor, maar vormt het een onderdeel van een of andere stroomkring.

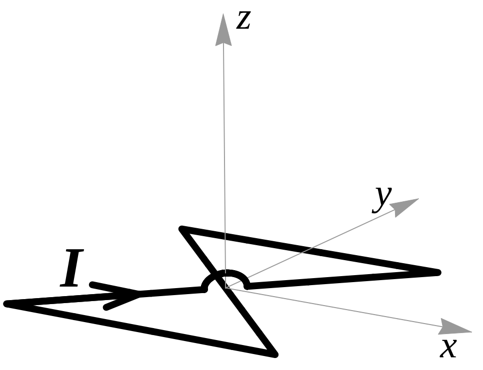


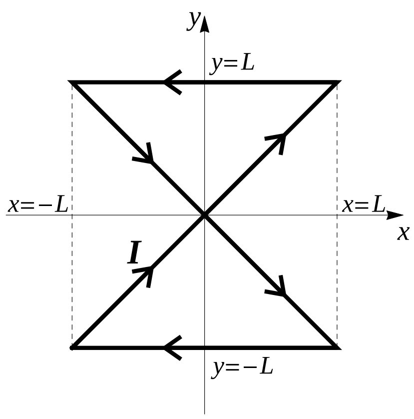
a. Toon aan, met gebruikmaking van de wet van Biot-Savart, dat geldt voor de bijdrage $\vec{B}^{\,a}(\vec{r}_0)$ van dit stuk strooomdraad aan het magnetisch veld van de stroomkring waarvan het deel uitmaakt, in het punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{B}^{\,a}(\vec{r}_0) \;=\; \frac{\mu_0\,I}{4\pi}\,\frac{1}{(y_0^2+z_0^2)}\left\{\frac{x_0+a}{\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2+z_0^2}} - \frac{x_0-a}{\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2+z_0^2}}\right\}\begin{pmatrix}0\\-z_0\\y_0\end{pmatrix}$$

Gegeven: Een primitieve (naar u) van $\frac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$.

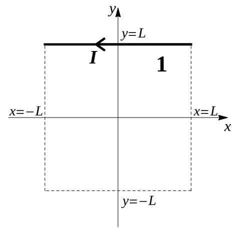
Beschouw nu de links weergegeven stroomkring, die wat betreft magnetische eigenschappen gemakshalve vervangen gedacht kan worden door de volledig platte stroomkring zoals rechts weergegeven.





Door gebruik te maken van het gedrag van magnetische velden onder spiegeling, rotatie en/of translatie van een stroomverdeling, is het veld van deze stroomkring uiteindelijk uit te drukken in termen van het bij onderdeel a) gevonden veld $\vec{B}^{\,a}$.

Bekijk allereerst de bijdrage $\vec{B}^{\,1}$ van het stuk stroomdraad 1, dat loopt van $(L, L, 0)$ naar $(-L, L, 0)$.

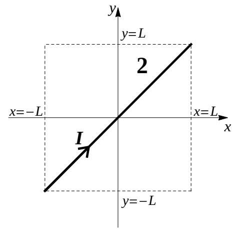


b. Toon aan dat geldt:

$$\vec{B}^{\,1}(\vec{r}_0) \;=\; -\vec{B}^{\,a=L}(x_0, y_0 - L, z_0)$$

In het rechterlid staat $\vec{B}^{\,a=L}$ voor de bij onderdeel a) gevonden uitdrukking, met a vervangen door L.

Beschouw vervolgens de bijdrage $\vec{B}^{\,2}$ van het stuk stroomdraad 2, dat loopt van $(-L, -L, 0)$ naar $(L, L, 0)$.

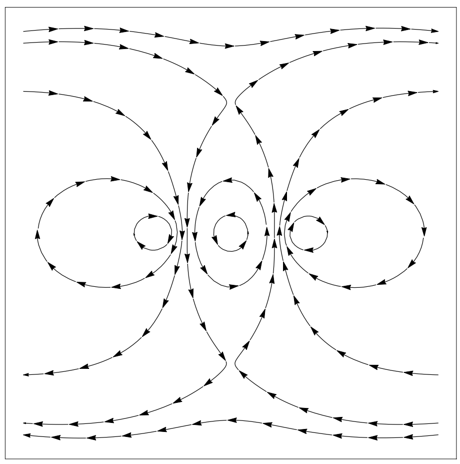


c. Toon aan dat geldt:

$$\begin{aligned}
B^2_x(\vec{r}_0) \;&=\; \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,B_x^{a=\sqrt{2}L}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0+y_0)\,,-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0-y_0)\,,z_0) \\
&\qquad -\;\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,B_y^{a=\sqrt{2}L}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0+y_0)\,,-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0-y_0)\,,z_0) \\
B^2_y(\vec{r}_0) \;&=\; \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,B_x^{a=\sqrt{2}L}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0+y_0)\,,-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0-y_0)\,,z_0) \\
&\qquad +\;\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,B_y^{a=\sqrt{2}L}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0+y_0)\,,-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0-y_0)\,,z_0) \\
B^2_z(\vec{r}_0) \;&=\; B_z^{a=\sqrt{2}L}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0+y_0)\,,-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0-y_0)\,,z_0)
\end{aligned}$$

d. Toon aan dat geldt voor het magnetisch veld $\vec{B}^{\rm tot}$ van de gehele stroomkring:

$$\begin{aligned}
B^{\rm tot}_x(\vec{r}_0) \;&=\; B^1_x(x_0,y_0,z_0) \;-\; B^1_x(x_0,-y_0,z_0) \;+\; B^2_x(x_0,y_0,z_0) \;-\; B^2_x(x_0,-y_0,z_0) \\
B^{\rm tot}_y(\vec{r}_0) \;&=\; B^1_y(x_0,y_0,z_0) \;+\; B^1_y(x_0,-y_0,z_0) \;+\; B^2_y(x_0,y_0,z_0) \;+\; B^2_y(x_0,-y_0,z_0) \\
B^{\rm tot}_z(\vec{r}_0) \;&=\; B^1_z(x_0,y_0,z_0) \;-\; B^1_z(x_0,-y_0,z_0) \;+\; B^2_z(x_0,y_0,z_0) \;-\; B^2_z(x_0,-y_0,z_0)
\end{aligned}$$



In de figuur staat het veldlijnenpatroon weergegeven van de volledige stroomkring, in een bepaald vlak.

e. Om welk vlak gaat het? U kunt volstaan met de specificatie van het vlak, zonder nadere toelichting.

Er is een dunne platte magneet die (buiten de magneet) hetzelfde magnetisch veld geeft als het veld van de stroomkring.

f. Specificeer die dunne platte magneet. Geef zowel de vorm van de magneet als de grootte en de richting van de (effectieve) oppervlaktedipooldichtheid ervan. Licht uw antwoord toe.