Tentamen Elektromagnetisme
9 april 2019

1a (10)

Een lijnelementje in $\vec{r} = (0,0,z)$ heeft lengte dz [2] en draagt een lading $\lambda_0 dz$. Deze lading draagt [2] bij aan het elektrisch veld:

$$d\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0 dz}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}$$

$$= \frac{\lambda_0 dz}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x_0, y_0, z_0 - z)}{\left(x_0^2 + y_0^2 + (z_0-z)^2\right)^{3/2}}$$

Integeren over z levert achtereenvolgens: [2]

$$E_x(\vec{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x_0}{\left(x_0^2 + y_0^2 + (z_0-z)^2\right)^{3/2}}\, dz$$

$$= \frac{\lambda_0 x_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[- \frac{z_0 - z}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2+(z_0-z)^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \qquad (u = z_0 - z,\ du = -dz)$$

$$= \frac{\lambda_0 x_0}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}$$

$$E_y(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0 y_0}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \qquad \text{(verwissel } x_0 \text{ en } y_0\text{)}$$ [2]

$$E_z(\vec{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z_0 - z}{\left(x_0^2 + y_0^2 + (z_0-z)^2\right)^{3/2}}\, dz$$ [2]

$$= \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-u}{(x_0^2+y_0^2+u^2)^{3/2}}\, du$$

$$= 0 \qquad \text{(want integrand is oneven)}$$

Samengevat:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x_0, y_0, 0)}{x_0^2 + y_0^2}.$$

b) In dit geval is het staafje een puntlading met grootte

4 $\lambda_1 L$ 1 in $\vec{r}_0 = (R, 0, 0)$ 1. Hierop werkt een kracht van 1

$$\vec{F} = \lambda_1 L \, \vec{E}^{draad}(R,0,0)$$

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1 L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(R,0,0)}{R^2} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 L}{2\pi\varepsilon_0 R} \hat{x}$$ 1

c) Het staafje wordt opgebouwd uit lijnelementjes dx 1

4 in $(x, 0, 0)$, elk met grootte $\lambda_1 dx$. Op zo'n elementje 1

werkt een kracht van:

$$d\vec{F} = \lambda_1 dx \cdot \vec{E}^{draad}(x,0,0)$$

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \hat{x}}{2\pi\varepsilon_0 x} dx$$ 1

De totale kracht op het staafje is dan

$$\vec{F} = \int_R^{R+L} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \hat{x}}{2\pi\varepsilon_0 x} dx$$

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \hat{x}}{2\pi\varepsilon_0} \Big[\ln x \Big]_R^{R+L}$$ 1

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \hat{x}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(1 + \frac{L}{R}\right)$$

d) We gebruiken eenvoudig de benadering 1

2 $\ln\left(1 + \frac{L}{R}\right) \approx \frac{L}{R}$

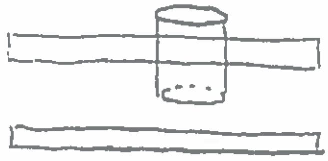
en vinden: 1

$$\vec{F} = \frac{\lambda_0 \lambda L}{2\pi\varepsilon_0 R} \hat{x}$$

Dit komt overeen met de verwachting bij b).

2a (8)

Kies een cilinder die door de bovenste plaat heen steekt: 2



De bodem ligt tussen de platen.

De elektrische flux hangt niet af van de horizontale positie, omdat $\vec{E}^{sys}$ alleen van z kan afhangen. 1

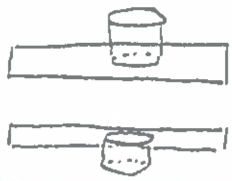
We kunnen de cilinderwand verlengen of verkorten, maar hierdoor verandert Q_{omvat} niet. Ook de flux door het Gaussisch oppervlak blijft gelijk, want deze heeft alleen een bijdrage van de deksels, omdat $\vec{E} = f(z)\hat{z}$. 2

Dit betekent dat (i) overal tussen de platen $\vec{E}$ hetzelfde is en (ii) overal boven de bovenste plaat ook. In het geval (ii) dus overal nul. 2

Eenzelfde redenering met een cilinder door de onderste plaat, leert dat $\vec{E} = \vec{0}$ overal beneden de onderste plaat. 1

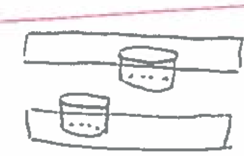
b (8)

(i) Kies een cilinder met bodem in de bovenste plaat en een cilinder met deksel in de onderste plaat: 2



De flux door elk van de cilinders is <u>nul</u>, want binnen de geleiders heerst geen veld en buiten de condensator ook niet. 2
De omvatte lading is dus altijd nul.

(ii) Kies cilinders die een stukje van de binnenoppervlakken omvatten: 2



De flux hangt niet af van de horizontale positie van de cilinders, omdat $\vec{E}^{sys}$ alleen van z afhangt en niet van x of y. 2
De omvatte lading is dus gelijk ongeacht de horizontale positie. De lading is dus gelijkmatig verdeeld.

c) (4)

Kies een Gaussische cilinder als volgt: 1

De deksels hebben oppervlakte A.

Dan is de omvatte lading $-\frac{Q}{\Theta}\cdot A$. 1

De flux door de cilinder heeft alleen een bijdrage 1
van het deksel:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\Theta} = \int_{deksel} \vec{E}^{sys}\cdot d\vec{\Theta} = \int_{deksel} f(z)\hat{z}\cdot d\vec{\Theta} = f(z)\cdot A .$$

Gelijkstellen aan $-\frac{Q}{\epsilon_0\Theta}\cdot A$ geeft: 1

$$f(z) = -\frac{Q}{\epsilon_0\Theta} .$$

Dus $\vec{E}^{sys} = -\frac{Q}{\epsilon_0\Theta}\hat{z}$.

d) (5)

Een pad tussen de platen is een recht lijnstuk 1
met $d\vec{r} = \hat{z}dz$. Het potentiaalverschil tussen de 1
platen is:

$$V = -\int_0^h \vec{E}^{sys}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_0^h \left(-\frac{Q}{\epsilon_0\Theta}\hat{z}\right)\cdot\hat{z}\,dz$$ 2

$$= \frac{Q}{\epsilon_0\Theta}\int_0^h dz$$

$$= \frac{Qh}{\epsilon_0\Theta}$$

Hieruit volgt: 1

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0\Theta}{h} .$$

3a (3)

De dichtheid van polen door het volume van de bol is nul, want $-\mathrm{div}\,\vec{\nu} = 0$. 1

De oppervlaktepooldichtheid is $\vec{\nu}\cdot\hat{n}$, met $\hat{n}$ de normaal op de bol. 1 Deze dichtheid is gelijk aan: 1

$\nu_0\hat{z}\cdot\hat{n} = \nu_0\cos\theta$.

b (6)

De equivalente poolverdeling van de bolmagneet met uitgeboorde schacht bestaat uit een volumepooldichtheid $-\mathrm{div}\,\vec{\nu} = 0$ en een oppervlaktepooldichtheid $\nu_0\cos\theta$ over de bol met weglating van twee kleine schijfjes. 2

Over het oppervlak van de schacht is de equivalente poolverdeling nul, want de normaal staat er loodrecht op $\vec{\nu}$. 2 In de limiet van zeer dunne schacht is deze verdeling gelijk aan die van de hele bolmagneet. 1 Het magnetisch veld is dus ook gelijk. 1

c (6)

In het geval van het weggesneden bolletje is de equivalente poolverdeling die van de bolmagneet met daarnaast een oppervlaktepoolverdeling $-\vec{\nu}_0\cdot\hat{n}$ over het oppervlak van het kleine bolletje. 2 Binnen de holte is het magnetisch veld dus een superpositie van de verdeling over de grote bol, $-\frac{1}{3}\mu_0\nu_0\hat{z}$, 2 en die over de kleine bol, $+\frac{1}{3}\mu_0\nu_0\hat{z}$. Samen dus nul. 2

4a 8

Het stuk draad wordt geparametriseerd door: 1

$\vec{r} = (x,0,0)$, dus $d\vec{r} = (1,0,0)\,dx$. 1

Bepaal eerst: 2

$$d\vec{r} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & 0 & 0 \\ x_0 - x & y_0 & z_0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\cdot 0 - \hat{y}\cdot z_0\,dx + \hat{z}\cdot y_0\,dx$$

$$= (0, -z_0, y_0)\,dx.$$

Biot-Savart toepassen geeft: 2

$$d\vec{B}^a(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{d\vec{r}\times(\vec{r}_0-\vec{r})}{|\vec{r}_0-\vec{r}|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{(0,-z_0,y_0)}{\left((x_0-x)^2+y_0^2+z_0^2\right)^{3/2}}\,dx.$$

Na integratie vinden we: 2

$$\vec{B}^a(\vec{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{(0,-z_0,y_0)}{\left((x_0-x)^2+y_0^2+z_0^2\right)^{3/2}}\,dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}(0,-z_0,y_0)\int_{x_0+a}^{x_0-a}\frac{-du}{\left(u^2+y_0^2+z_0^2\right)^{3/2}} \qquad (u = x_0 - x)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}(0,-z_0,y_0)\cdot\left[\frac{-u}{(y_0^2+z_0)^2\sqrt{u^2+y_0^2+z_0^2}}\right]_{x_0+a}^{x_0-a}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{(0,-z_0,y_0)}{x_0^2+y_0^2}\cdot\left(\frac{x_0+a}{\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2+z_0^2}} - \frac{x_0-a}{\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2+z_0^2}}\right)$$

b 4

Stuk 1 wordt verkregen uit $\vec{B}^a$ door het stuk draad te transleren langs y over een afstand L, 1 door I te vervangen door $-I$ 1 en door $a = L$ te kiezen. Dus 1

$\vec{B}^1(\vec{r}_0) = -\vec{B}^{a=L}(T^{-1}\vec{r}_0)$ met T de translatie en T^{-1} zijn inverse. We vinden: 1

$$\vec{B}^1(\vec{r}_0) = -\vec{B}^{a=L}(x_0, y_0 - L, z_0).$$

c

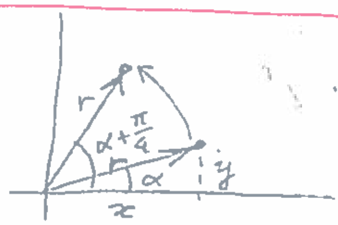
(5)

$\vec{B}^2$ volgt uit $\vec{B}^a$ door de draad tegen de klok in te roteren over $\frac{\pi}{4}$ en de lengte $a = \sqrt{2}\,L$ te kiezen. 1

Er geldt : 1

$$\vec{B}^2(\vec{r}_0) = R\vec{B}^{a=\sqrt{2}L}(R^{-1}\vec{r}_0)$$ met R de rotatie (R^{-1} invers)

Bij het roteren van een vector $\vec{r}_0$ rond de z-as blijft zijn lengte gelijk maar zijn hoek wordt $\frac{\pi}{4}$ groter. 1



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\frac{\pi}{4}) \\ r\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}) \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r(\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\ \sin\frac{\pi}{4}) \\ r(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}) \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r(\frac{x}{r}\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{y}{r}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}) \\ r(\frac{y}{r}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{x}{r}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}) \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x-y) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x+y) \\ z \end{pmatrix}$$

De vector $\vec{B}^2$ moet volgens deze regel geroteerd worden. Maar bij $R^{-1}\vec{r}_0$ moeten we over $-\frac{\pi}{4}$ roteren, dus 1

$$R\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0+y_0) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(y_0-x_0) \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Dit levert : 1

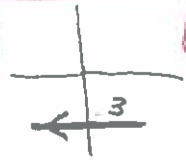
$$B^2_x(\vec{r}_0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ B_x^{a=\sqrt{2}L}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x_0+y_0), \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(y_0-x_0), z_0\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ B_y^{a=\sqrt{2}L}(\quad \text{idem} \quad)$$

$$B^2_y(\vec{r}_0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ B_x^{a=\sqrt{2}L}(\quad \text{idem} \quad)$$
$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ B_y^{a=\sqrt{2}L}(\quad \text{idem} \quad)$$

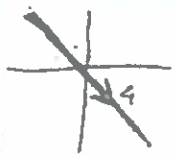
$$B^2_z(\vec{r}_0) = B_z^{a=\sqrt{2}L}(\quad \text{idem} \quad)$$

d) 5

Het totale veld is de superpositie van $\vec{B}^1$, $\vec{B}^2$ en de overgebleven twee stukken: 1



2



2

$\vec{B}^3$ volgt uit $\vec{B}^1$ door te spiegelen in het vlak $y=0$.
Het B-veld wisselt hierbij van teken.
Dit betekent: $\vec{B}^3(x_0, y_0, z_0) = -\vec{B}^1(x_0, -y_0, z_0)$

$\vec{B}^4$ volgt uit $\vec{B}_2$ door te spiegelen in het vlak $y=0$.
Dit betekent weer: $\vec{B}^4(x_0, y_0, z_0) = -\vec{B}^2(x_0, -y_0, z_0)$

Optellen van de vier velden levert de gegeven formules. 0

e) 2

De veldlijnen vormen lussen rond de stroomdraden volgens de rechterhandregel. Er loopt dus stroom: 2

Dit is dus het yz-vlak ter hoogte van $x=0$.

f) 6

Volgens het equivalentieprincipe van Ampère is de kring equivalent aan een dunne magneet waarvan de kring de rand vormt en die gemagnetiseerd is in een richting loodrecht op het vlak, met oppervlakte-dipooldichtheid $\vec{\mu} = I\hat{n}$. De richting is volgens de rechterhandregel: 2 2 2