Tentamen Elektromagnetisme
2 juli 2019

1 a. 3 Elk vlak door het middelpunt van de bol is een symmetrievlak van de ladingsverdeling. Door het punt $\vec{r} = (x, y, z)$ gaan twee onderling loodrechte symmetrievlakken. Het E-veld in $\vec{r}$ moet parallel zijn aan beide vlakken, dus het is radiaal gericht: $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\hat{r}$.

3 Rotatiesymmetrie rond een willekeurige as door het middelpunt van de bol garandeert dat $\vec{E}$ niet afhangt van de hoekcoördinaten θ en φ: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$.

2 Kies nu als Gaussisch oppervlak een bol waarvan het middelpunt samenvalt met het middelpunt van de ladingsverdeling en waarvan de straal r is.

2 De omvatte lading is: $Q_{omvat} = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ Q & (r>R) \end{cases}$

6 Wet van Gauss:

$$\oint_{bol} \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,d\mathcal{O} = Q_{omvat}/\varepsilon_0 = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ Q/\varepsilon_0 & (r>R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_{bol} E(r)\hat{r}\cdot\hat{r}\,d\mathcal{O} = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ Q/\varepsilon_0 & (r>R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r)\oint_{bol} d\mathcal{O} = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ Q/\varepsilon_0 & (r>R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ Q/\varepsilon_0 & (r>R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & (r<R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r>R) \end{cases}$$

T = 16

1b. Alle lading op de geleider bevindt zich op het oppervlak.
2 De ladingsverdeling en het E-veld zijn dus die van (1a).

1 Het potentiaalverschil volgt uit

$$V = - \int_{\ell(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

waarbij $\ell(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2)$ een willekeurig pad is tussen $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$.

2 Kies een pad dat bestaat uit twee delen

ℓ_1 : een pad met constante r_1 waarbij alleen θ en φ variëren tot deze samenvallen met θ_2 en φ_2.

ℓ_2 : een recht lijnstuk dat radiaal naar binnen of buiten loopt van r_1 naar r_2

1 Op ℓ_1 staat $\vec{E}$ loodrecht op $d\vec{r}$. De integraal levert daar 0.

3 Op ℓ_2 is $d\vec{r} = \hat{r}\, dr$. De integraal levert daar.

$$V = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

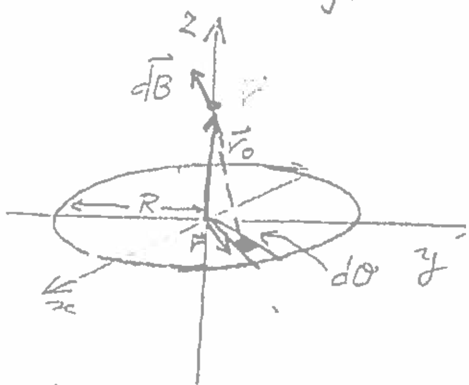
T = 9

2a) Elk strookje van de ideale stroomspoel kunnen we verrangen denken door een platte magneet met dikte dz en oppervlaktedipooldichtheid $\vec{\mu} = dI^{strook}\,\hat{n} = nI_0 dz\,\hat{z}$ (1)
(Dit is het equivalentieprincipe van Ampère.) Alle plakjes op elkaar geven een cilindermagneet met lengte L en homogene magnetisatie $\vec{\nu} = nI_0\,\hat{z}$. (1)
De equivalente poolverdeling hiervan bestaat uit de combinatie van:

- een volumepoolverdeling $-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nu} = 0$ (1)
- een oppervlaktepoolverdeling $\vec{\nu}\cdot\hat{z} = nI_0$ op de bovenste schijf. (1)
- een oppervlaktepoolverdeling $\vec{\nu}\cdot(-\hat{z}) = -nI_0$ op de onderste schijf. (1)

Totaal: 5

b) Eerst bepalen we het magnetische veld van de schijf op hoogte $z = 0$. Dit is een oppervlaktepoolverdeling met homogene dichtheid $-nI_0$. De bijdrage aan het $\vec{B}$-veld van een oppervlakte-elementje dO is:



$$d\vec{B}^{bs}(0,0,z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}(-nI_0\,dO)\,\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}. \quad (3)$$

Geschikte keuze van $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ en dO (zie schets) geeft:

$\vec{r}_0 = (0,0,z_0)$ (1)
$\vec{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0)$ (1)
$dO = \rho\, d\rho\, d\varphi$ (1)

$$\vec{B}^{bs}(0,0,z_0) = -\frac{\mu_0 nI_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{R} \frac{(-\rho\cos\varphi, -\rho\sin\varphi, z_0)}{(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}}\,\rho\, d\rho\, d\varphi \quad (2)$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $B_x = B_y = 0$.

$$B_z^{bs}(0,0,z_0) = -\frac{\mu_0 nI_0}{4\pi}\cdot 2\pi z_0 \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mu_0 nI_0 z_0 \left[\frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}}\right]_0^R$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mu_0 nI_0 z_0 \left(\frac{1}{|z_0|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}\right). \quad (2)$$

Het veld van de bovenste schijf vinden we door nI_0 te vervangen door $-nI_0$ en de schijf te transleren naar $z=L$, d.w.z. door z_0 te vervangen door z_0-L:

$$\vec{B}^{os}(0,0,z_0) = +\tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 (z_0-L)\left(\frac{1}{|z_0-L|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right).$$ 3

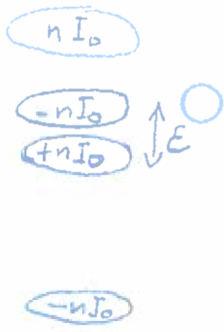
Het veld van de poolverdeling vinden we door superpositie. Hierbij letten op het teken van $\frac{z_0}{|z_0|} = \pm 1$ en $\frac{z_0-L}{|z_0-L|} = \pm 1$:

$$\vec{B}^{pv}(0,0,z_0) = \vec{B}^{bs}(0,0,z_0) + \vec{B}^{os}(0,0,z_0)$$

$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-L}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\} & (z_0<0) \\ \tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{-2 + \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-L}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\} & (0<z_0<L) \\ \tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-L}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\} & (z_0>L) \end{cases}$$ 2

Totaal: 15

2c Om ook het veld binnen de ideale stroomspoel te bepalen laten we een plakje met dikte ε weg op de hoogte $z \doteq z_0$. De equivalente poolverdeling hiervan is geschetst. 3 Dan nemen we de limiet $\varepsilon \downarrow 0$. De twee extra schijven geven een bijdrage aan het $\vec{B}$-veld dat we simpel kunnen bepalen uit de vergelijking voor $\vec{B}^{pv}$ waarbij het teken van nI_0 net omdraait.



Zo wordt voor $z-\tfrac{1}{2}\varepsilon < z_0 < z+\tfrac{1}{2}\varepsilon$:

$$\vec{B}^{extra}(0,0,z_0) = -\tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{-2 + \frac{z_0+\frac{1}{2}\varepsilon}{\sqrt{R^2+(z_0+\frac{1}{2}\varepsilon)^2}} - \frac{z_0-\frac{1}{2}\varepsilon}{\sqrt{R^2+(z_0-\frac{1}{2}\varepsilon)^2}}\right\}$$ 4

In de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ vinden we eenvoudig

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \vec{B}^{extra}(0,0,z_0) = \mu_0 n I_0 \qquad (z-\tfrac{1}{2}\varepsilon < z_0 < z+\tfrac{1}{2}\varepsilon)$$ 2

Voor punten buiten de twee extra schijven is

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \vec{B}^{extra}(0,0,z_0) = 0 \qquad (z < z_0-\tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ en } z > z_0+\tfrac{1}{2}\varepsilon)$$ 3

Door $\vec{B}^{extra}$ op te tellen bij $\vec{B}^{pv}$ vinden we precies (1). 3

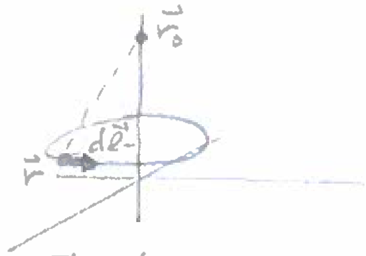
Totaal: 15

3a) Elk vlak dat de z-as bevat is een antispiegelvlak van de stroomverdeling, d.w.z. de stroomverdeling keert alleen van richting om maar blijft verder gelijk (2) Het B-veld in punten van zo'n vlak ligt parallel aan het vlak (2) Twee onderling loodrechte antispiegelvlakken snijden elkaar op de z-as. Op de z-as ligt het B-veld dus parallel aan beide vlakken, dus langs de z-as. (1)

Totaal: 5

Alternatief: De stroomverdeling is symmetrisch onder elke rotatie rond de z-as. (2) Het B-veld moet dezelfde symmetrie bezitten. (2) Voor punten op de z-as kan het geroteerde veld alleen samenvallen met het oorspronkelijke veld als het parallel is met de z-as. (1)

3b) Volgens Biot-Savart is de bijdrage van het stukje $d\vec{\ell}$ van de strook:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad (1)$$

$\vec{r}_0 = (0,0,z_0)$ (1)

$\vec{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$ (1)

$d\vec{\ell} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)\, d\theta$ (1)

We integreren eerst over $d\vec{\ell}$; later volgt de integratie over dI.

Het uitprodukt doen we eerst:

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ -R\cos\theta & -R\sin\theta & z_0 - z \end{vmatrix} d\theta$$

$$= \{ R(z_0 - z)\cos\theta\, \hat{x} + R(z_0 - z)\sin\theta\, \hat{y} + R^2 \hat{z} \}\, d\theta$$

We vinden dus:

$$\vec{B}^{strook} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \frac{\left((z_0 - z)\cos\theta, (z_0 - z)\sin\theta, R \right)}{\left(R^2 + (z_0 - z)^2 \right)^{3/2}} R\, d\theta$$

(3)

Nu integreren we θ van 0 tot 2π. We zien direkt dat $B_x = B_y = 0$, zoals we al wisten.

$$\vec{B}^{strook}(0,0,z_0) = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \hat{z} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{\left(R^2 + (z_0 - z)^2 \right)^{3/2}} \quad \text{met } dI = n I_0 dz$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \frac{R^2}{\left(R^2 + (z_0 - z)^2 \right)^{3/2}} dz\, \hat{z}$$

(3)

Totaal: 10

3c

$$\vec{B}(0,0,z_0) = \tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \int_0^L \frac{dz}{(R^2+(z_0-z)^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

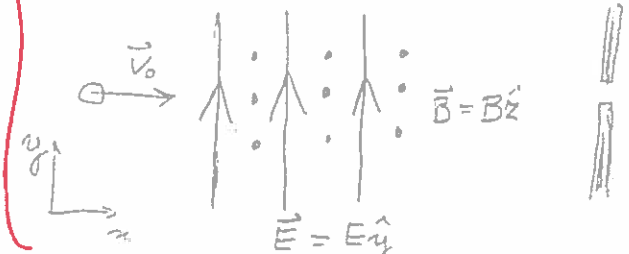
$$= \tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \int_{z_0}^{z_0-L} \frac{-du}{(R^2+u^2)^{3/2}} \qquad \text{met } u = z_0 - z$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \left[\frac{u}{R^2\sqrt{R^2+u^2}} \right]_{z_0}^{z_0-L} \qquad (1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 \hat{z} \left(\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-L}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}} \right) \qquad (1)$$

Totaal: 5

4 In een homogeen magneetveld zou de bundel deeltjes afbuigen in een richting loodrecht op $\vec{B}$. Dit moet gecompenseerd worden door een elektrisch veld dat daarom loodrecht op $\vec{B}$ staat:



2 De elektrische kracht is : $\vec{F}_E = q\vec{E} = qE\hat{y}$

2 De magnetische kracht is : $\vec{F}_B = q\vec{v}_0 \times \vec{B} = -qv_0 B\hat{y}$

De netto kracht moet nul zijn om de deeltjes rechtdoor te laten gaan, dus

2

$$qE - qv_0 B = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \frac{E}{B}.$$

Alleen deeltjes met een snelheid (dichtbij) v_0 gaan rechtuit door het gat.

T=10