Hertentamen *Elektromagnetisme* (NS-112B)

dinsdag 2 juli 2019

13:30–16:30 uur

- Het gebruik van literatuur of een rekenmachine is niet toegestaan.
- U mag gebruik maken van de gegevens in het formuleblad dat samen met het tentamen is uitgedeeld. Bij de opgaven zelf staan soms nog specifieke gegevens.
- Schrijf niet alleen formules op, maar licht de stappen in uw redeneringen kort en duidelijk toe.
- Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren.
  Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.
- Schrijf op ieder blad uw naam.
- U kunt in totaal 90 punten behalen. Aan het begin van iedere opgave staat hoeveel per onderdeel. Het cijfer wordt bepaald door:

$$\frac{1}{10}\,(10 + \text{aantal behaalde punten})$$

SUCCES!

1 Een geleidende bol

a: 16 b: 9 (totaal: 25)

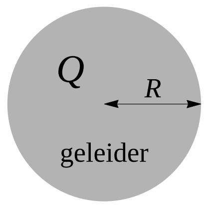
a. Toon aan, met behulp van symmetrie-redeneringen en de wet van Gauss, dat geldt voor het elektrische veld van een boloppervlak met straal R waarover een totale lading Q gelijkmatig verdeeld is:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & r > R \end{cases}$$

Het assenstelsel is hierbij zodanig gekozen dat het middelpunt van het boloppervlak samenvalt met de oorsprong. Verder geldt, zoals gebruikelijk:

$$r = |\vec{r}| \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

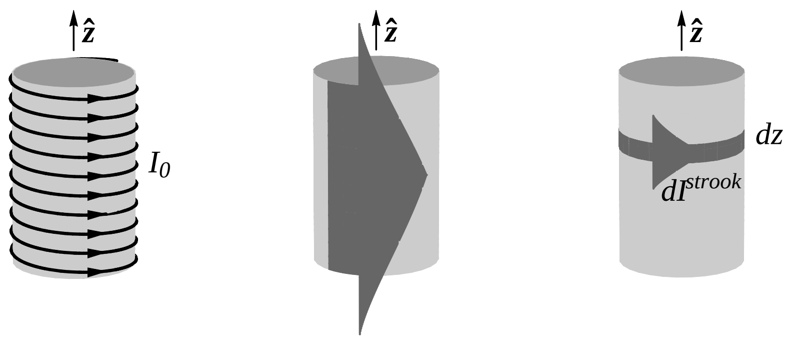
Beschouw nu een geleidende bol (straal R), waarop zich in totaal een hoeveelheid lading Q bevindt.



b. Bepaal het potentiaalverschil tussen twee punten $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ buiten de bol.

Inleiding op de volgende twee opgaven

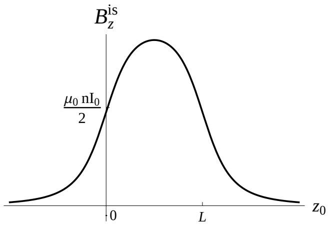
In de volgende twee opgaven gaan we het magnetische veld bepalen van een cilinderoppervlak, met lengte L en straal R, waarover de stroom continu en gelijkmatig verdeeld is (zie de middelste figuur).



We vatten deze ideale cilindrische stroomspoel op als een benadering van een echte cilindrische stroomspoel (zie links), die bestaat uit n windingen per lengte-eenheid en een stroom I_0 voert. In deze benadering geldt voor de stroom $\mathrm{d}I^{\text{strook}}$ door een smalle strook met breedte $\mathrm{d}z$ van de ideale stroomspoel (zie rechts):

$$\mathrm{d}I^{\text{strook}} = n\, I_0\, \mathrm{d}z$$

We kiezen het assenstelsel zodanig dat de z-as samenvalt met de as van de stroomspoel, en de stroompoel ligt tussen $z = 0$ en $z = L$.

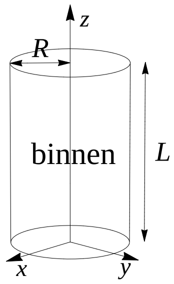


We gaan op twee verschillende manieren aantonen dat geldt voor het magnetische veld $\vec{B}^{\,\text{is}}$ van de ideale stroomspoel op de z-as:

$$\vec{B}^{\,\text{is}}(0,0,z_0) \;=\; \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\}\hat{z} \quad (1)$$

2 Eerste manier: met behulp van equivalenties

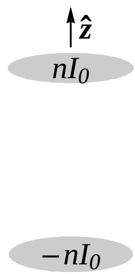
a: 5 b: 15 c: 15 (totaal: 35)



In deze opgave gaan we het magnetische veld van de ideale stroomspoel bepalen met behulp van het equivalentieprincipe van Ampère en met gebruikmaking van equivalente poolverdelingen.
Allereerst onderscheiden we twee gebieden:

- het gebied *binnen* de stroomspoel, d.w.z.: $0 < z < L$ en $\rho < R$, met ρ de afstand tot de z-as;
- het gebied *buiten* de stroomspoel: de rest van de ruimte.

a. Leg het volgende uit met gebruikmaking van het equivalentieprincipe van Ampère en equivalente poolverdelingen:
In het gebied *buiten* de stroomspoel is het veld van de stroomspoel gelijk aan het veld van de combinatie van:



- een homogene *pool*verdeling over een schijf met straal R, ter hoogte $z = 0$, met oppervlakte*pool*dichtheid: $-n\,I_0$;
- een homogene *pool*verdeling over een schijf met straal R, ter hoogte $z = L$, met oppervlakte*pool*dichtheid: $n\,I_0$.

Noem $\vec{B}^{\,\text{pv}}$ het magnetische veld van de poolverdeling over de twee schijven.

b. Toon aan dat geldt:

$$\vec{B}^{\,\text{pv}}(0,0,z_0) \;=\; \begin{cases} \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\}\hat{z} & \text{als } z_0 < 0 \\[2ex] \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}} - 2\right\}\hat{z} & \text{als } 0 < z_0 < L \\[2ex] \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{(z_0-L)}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}}\right\}\hat{z} & \text{als } z_0 > L \end{cases}$$

Door combinatie van de voorgaande twee onderdelen volgt dat voor $z_0 < 0$ en voor $z_0 > L$ aan (1) is voldaan (zie bovenaan de pagina).

c. Toon aan dat (1) ook geldt voor $0 < z_0 < L$.
Hint: Beschouw de ideale stroomspoel met daaruit weggelaten een smalle strook.

3 Tweede manier: met behulp van Biot-Savart

a: 5 b: 10 c: 5 (totaal: 20)

In deze opgave gaan we met behulp van de wet van Biot-Savart het magnetische veld $\vec{B}^{\,\mathrm{is}}$ van de ideale stroomspoel bepalen op de z-as.

a. Leg met symmetrie-argumenten uit dat in punten op de z-as het magnetische veld gericht is langs de z-as.

b. Toon aan, met behulp van de wet van Biot-Savart, dat geldt voor de bijdrage van de smalle strook tussen z en $z + \mathrm{d}z$ aan het magnetische veld:

$$\mathrm{d}\vec{B}^{\mathrm{strook}}(0,0,z_0) \;=\; \frac{\mu_0\, n\, I_0}{2} \frac{R^2}{\left\{R^2 + (z_0 - z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}z\, \hat{z}$$

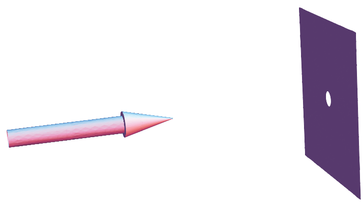
c. Toon (1) aan (zie bovenaan pagina 3).
(zie bovenaan pagina 3)

Gegeven: Een primitieve (naar x) van $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ is $\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

4 Een snelheidsfilter

totaal: 10

Een bundel geladen deeltjes is gericht op een opening in een ondoordringbare plaat. De deeltjes kunnen alleen via de opening het gebied achter de plaat bereiken, waar zich een experimentele opstelling bevindt.



De deeltjes bewegen allemaal in dezelfde richting, loodrecht op de plaat, maar nog wel met verschillende groottes van de snelheid. Voor het experiment is het van belang dat alleen *die* deeltjes doorgelaten worden waarvan de grootte van de snelheid gelijk is aan v_0.
Leg uit hoe dit voor elkaar gekregen kan worden door een geschikte combinatie van een homogeen elektrisch veld en een homogeen magnetisch veld aan te leggen.