

Tentamen Elektromagnetisme
2 juli 2019

1 a.) $\left. \begin{array}{l} \text{Elke vlak door het middelpunt van de bol is een} \\ \text{symmetrievlak van de ladingsverdeling. Door het punt} \\ \vec{r} = (x, y, z) \text{ gaan twee onderling loodrechte symmetrie-} \\ \text{vlakken. Het } E\text{-veld in } \vec{r} \text{ moet parallel zijn aan} \\ \text{beide vlakken, dus het is radiaal gericht: } \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}. \end{array} \right\} 3$

$\left. \begin{array}{l} \text{Rotatiesymmetrie rond een willekeurige as door het} \\ \text{middelpunt van de bol garandeert dat } \vec{E} \text{ niet} \\ \text{afhangt van de hoekcoördinaten } \theta \text{ en } \varphi: \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}. \end{array} \right\} 3$

$\left. \begin{array}{l} \text{Kies nu als Gaussisch oppervlak een bol waarvan het} \\ \text{middelpunt samenvalt met het middelpunt van de} \\ \text{ladingsverdeling en waarvan de straal } r \text{ is.} \end{array} \right\} 2$

$\left. \begin{array}{l} \text{De omvatte lading is: } Q_{\text{omvat}} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ Q & (r > R) \end{cases} \end{array} \right\} 2$

Wet van Gauss:

$$\oint_{\text{bol}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} d\Omega = Q_{\text{omvat}} / \epsilon_0 = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ Q / \epsilon_0 & (r > R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{bol}} E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} d\Omega = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ Q / \epsilon_0 & (r > R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) \oint_{\text{bol}} d\Omega = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ Q / \epsilon_0 & (r > R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ Q / \epsilon_0 & (r > R) \end{cases}$$

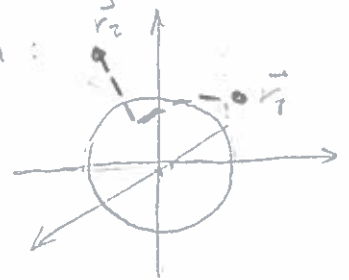
$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & (r > R) \end{cases}$$

1b.) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Alle lading op de geleider bevindt zich op het oppervlak.} \\ \text{De ladingsverdeling en het E-veld zijn dus die van (1a).} \end{array} \right.$

1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Het potentiaalverschil volgt uit} \\ V = - \int_{\mathcal{L}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{array} \right.$
waarbij $\mathcal{L}(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)$ een willekeurig pad is tussen \vec{r}_1 en \vec{r}_2 .

2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kies een pad dat bestaat uit twee delen:} \\ \mathcal{L}_1: \text{ een pad met constante } r_1 \text{ waarbij alleen} \\ \text{ } \theta \text{ en } \varphi \text{ variëren tot deze samenvallen} \\ \text{met } \theta_2 \text{ en } \varphi_2. \\ \mathcal{L}_2: \text{ een recht lijnstuk dat radiaal naar} \\ \text{binnen of buiten loopt van } r_1 \text{ naar } r_2 \end{array} \right.$



1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Op } \mathcal{L}_1 \text{ staat } \vec{E} \text{ loodrecht op } d\vec{r}. \text{ De integraal} \\ \text{levert daar } 0. \end{array} \right.$

Op \mathcal{L}_2 is $d\vec{r} = \hat{r} dr$. De integraal levert daar:

$$\begin{aligned} V &= - \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \end{aligned}$$

3

T=9

2a) Elk strookje van de ideale stroomspoel kunnen we vervangen denken door een platte magneet met dikte dz en oppervlaktepooldichtheid $\vec{\mu} = dI_{\text{strook}} \hat{n} = n I_0 dz \hat{z}$ (1)
 (Dit is het equivalentieprincipe van Ampère.) Alle plakjes op elkaar geven een cilindermagneet met lengte L en homogene magnetisatie $\vec{V} = n I_0 \hat{z}$. (1)
 De equivalente poolverdeling hiervan bestaat uit de combinatie van:

- een volumepoolverdeling $-\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ (1)

- een oppervlaktepoolverdeling $\vec{V} \cdot \hat{z} = n I_0$ op de bovenste schijf. (1)

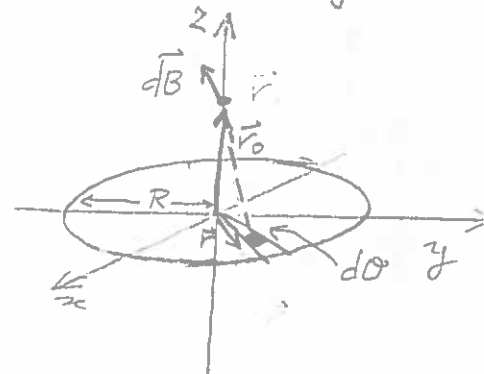
- een oppervlaktepoolverdeling $\vec{V} \cdot (-\hat{z}) = -n I_0$ op de onderste schijf. (1)

Totaal: 5

b) Eerst bepalen we het magnetische veld van de schijf op hoogte $z = z_0$. Dit is een oppervlaktepoolverdeling met homogene dichtheid $-n I_0$. De bijdrage aan het \vec{B} -veld van een oppervlakte-elementje $d\mathcal{O}$ is:

$$d\vec{B}^{bs}(0,0,z_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} (-n I_0 d\mathcal{O}) \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad (3)$$

Geschikte keuze van \vec{r}_0 , \vec{r} en $d\mathcal{O}$ (zie schets) geeft:



$$\vec{r}_0 = (0, 0, z_0) \quad (1)$$

$$\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0) \quad (1)$$

$$d\mathcal{O} = \rho d\rho d\varphi \quad (1)$$

$$\vec{B}^{bs}(0,0,z_0) = -\frac{\mu_0 n I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(-\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi, z_0)}{(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}} \rho d\rho d\varphi \quad (2)$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $B_x = B_y = 0$.

$$B_z^{bs}(0,0,z_0) = -\frac{\mu_0 n I_0}{4\pi} \cdot 2\pi z_0 \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \mu_0 n I_0 z_0 \left[\frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}} \right]_0^R$$

$$= -\frac{1}{2} \mu_0 n I_0 z_0 \left(\frac{1}{|z_0|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right) \quad (2)$$

Het veld van de bovenste schijf vinden we door nI_0 te vervangen door $-nI_0$ en de schijf te transleren naar $z=L$, d.w.z. door z_0 te vervangen door z_0-L :

$$\vec{B}^{os}(0,0,z_0) = +\frac{1}{2}\mu_0 n I_0 (z_0-L) \left(\frac{1}{|z_0-L|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}} \right) \quad (3)$$

Het veld van de poolverdeling vinden we door superpositie. Hierbij letten op het teken van $\frac{z_0}{|z_0|} = \pm 1$ en $\frac{z_0-L}{|z_0-L|} = \pm 1$:

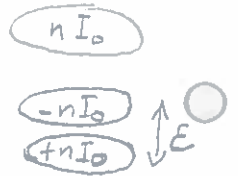
$$\vec{B}^{PV}(0,0,z_0) = \vec{B}^{bs}(0,0,z_0) + \vec{B}^{os}(0,0,z_0)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{ \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-L}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}} \right\} & (z_0 < 0) \\ \frac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{ -2 + \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-L}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}} \right\} & (0 < z_0 < L) \\ \frac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{ \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{z_0-L}{\sqrt{R^2+(z_0-L)^2}} \right\} & (z_0 > L) \end{cases} \quad (2)$$

Totaal: 15

2c Om ook het veld binnen de ideale stroomspoel te bepalen laten we een plakje met dikte ϵ weg op de hoogte $z=z_0$. De equivalente poolverdeling hiervan is geschetst (3). Dan nemen we de

limiet $\epsilon \downarrow 0$. De twee extra schijven geven een bijdrage aan het \vec{B} -veld dat we simpel kunnen bepalen uit de vergelijking voor \vec{B}^{PV} waarbij het teken van nI_0 net omdraait.



Zo wordt voor $z - \frac{1}{2}\epsilon < z_0 < z + \frac{1}{2}\epsilon$:



$$\vec{B}^{extra}(0,0,z_0) = -\frac{1}{2}\mu_0 n I_0 \left\{ -2 + \frac{z_0 + \frac{1}{2}\epsilon}{\sqrt{R^2+(z_0 + \frac{1}{2}\epsilon)^2}} - \frac{z_0 - \frac{1}{2}\epsilon}{\sqrt{R^2+(z_0 - \frac{1}{2}\epsilon)^2}} \right\} \quad (4)$$

In de limiet $\epsilon \downarrow 0$ vinden we eenvoudig

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \vec{B}^{extra}(0,0,z_0) = \mu_0 n I_0 \quad \left(z - \frac{1}{2}\epsilon < z_0 < z + \frac{1}{2}\epsilon \right) \quad (2)$$

Voor punten buiten de twee extra schijven is

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \vec{B}^{extra}(0,0,z_0) = 0 \quad \left(z < z_0 - \frac{1}{2}\epsilon \text{ en } z > z_0 + \frac{1}{2}\epsilon \right) \quad (3)$$

Door \vec{B}^{extra} op te tellen bij \vec{B}^{PV} vinden we precies (1). (3)

Totaal: 15

3a. Elk vlak dat de z -as bevat is een anti'spiegelvlak van de stroomverdeling, d.w.z. de stroomverdeling keert alleen van richting om maar blijft verder gelijk. Het B-veld in punten van zo'n vlak ligt parallel aan het vlak. Twee onderling loodrechte anti'spiegelvlakken snijden elkaar op de z -as. Op de z -as ligt het B-veld dus parallel aan beide vlakken, dus langs de z -as.

Totaal: 5

Alternatief: De stroomverdeling is symmetrisch onder elke rotatie rond de z -as. Het B-veld moet dezelfde symmetrie bezitten. Voor punten op de z -as kan het gerooteerde veld alleen samenvallen met het oorspronkelijke veld als het parallel is met de z -as.

3b

Volgens Biot-Savart is de bijdrage van het stukje $d\vec{\ell}$ van de strook:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \quad (1)$$

We integreren eerst over $d\vec{\ell}$; later volgt de integratie over dI .

Het uitproduct doen we eerst:

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ -R\cos\theta & -R\sin\theta & z_0 - z \end{vmatrix} d\theta$$

$$= \left\{ R(z_0 - z)\cos\theta \hat{x} + R(z_0 - z)\sin\theta \hat{y} + R^2 \hat{z} \right\} d\theta \quad (3)$$

We vinden dus:

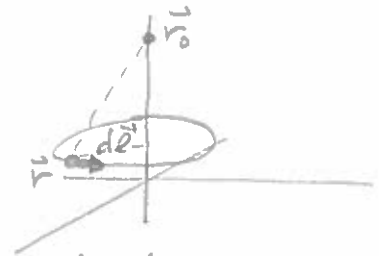
$$\vec{B}^{\text{strook}} = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \frac{(z_0 - z)\cos\theta, (z_0 - z)\sin\theta, R}{(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} R d\theta$$

Nu integreren we θ van 0 tot 2π . We zien direct dat $B_x = B_y = 0$, zoals we al wisten.

$$\vec{B}^{\text{strook}}(0, 0, z_0) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi z} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} \quad \text{met } dI = n I_0 dz$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \frac{R^2}{(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} dz \hat{z} \quad (3)$$

Totaal: 10



$$\vec{r}_0 = (0, 0, z_0) \quad (1)$$

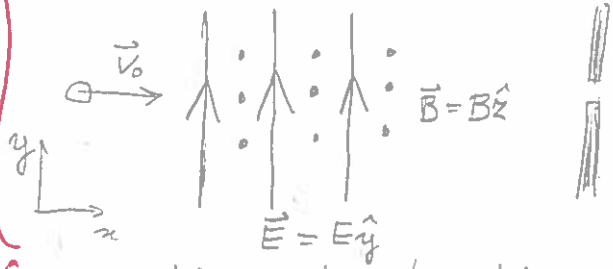
$$\vec{r} = (R\cos\theta, R\sin\theta, z) \quad (1)$$

$$d\vec{\ell} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0) d\theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{3c} \quad \vec{B}(0,0,z_0) &= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \int_0^L \frac{dz}{(R^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}} && \textcircled{3} \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \int_{z_0}^{z_0-L} \frac{-du}{(R^2 + u^2)^{3/2}} && \text{met } u = z_0 - z \\
 &= -\frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R^2 \hat{z} \left[-\frac{u}{R^2 \sqrt{R^2 + u^2}} \right]_{z_0}^{z_0-L} && \textcircled{1} \\
 &= \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \hat{z} \left(\frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} - \frac{z_0 - L}{\sqrt{R^2 + (z_0 - L)^2}} \right) && \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

Totaal: 5

4 } In een homogeen magnetisch veld zou de bundel deeltjes afbuigen in een richting loodrecht op \vec{B} . Dit moet gecompenseerd worden door een elektrisch veld dat daarom loodrecht op \vec{B} staat:



2 { De elektrische kracht is : $\vec{F}_E = q\vec{E} = -qE\hat{y}$

2 { De magnetische kracht is : $\vec{F}_B = q\vec{v}_0 \times \vec{B} = -qv_0 B\hat{y}$

○ De netto kracht moet nul zijn om de deeltjes recht door te laten gaan, dus

2 { $qE - qv_0 B = 0$

$\Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$

Alleen deeltjes met een snelheid (dichtbij) v_0 gaan rechtuit door het gat.

T=10

○