Tentamen Elektromagnetisme –12 april 2021, 15:15-18:15h -plus 30 minuten extra tijd indien van toepassing. Schrijf duidelijk met blauwe of zwarte pen, NIET met potlood, en begin elke opgave op een nieuw vel papier met daarop uw naam. Onleesbaar werk wordt niet nagekeken. Beargumenteer uw antwoorden kort en bondig. Dit is een open-boek tentamen; naast het boek "Griffiths" en eigen aantekeningen, evt. als pdf of gescand op laptop, is het gebruik van elektronische hulpmiddelen (internet, whatsapp, etc) niet toegestaan. Dit tentamen bestaat uit 17 onderdelen verdeeld over 7 opgaven. Met elk onderdeel kunnen maximaal 5 punten gescoord worden, dus 85 punten in totaal. Succes!

Opgave 1
Beschouw, in standaard cartesische coordinaten, het vectorveld $\mathbf{v} = c_1(x+y)\hat{\mathbf{x}} + c_2(x-y)\hat{\mathbf{y}} + c_3 z\hat{\mathbf{z}}$ met constanten c_1, c_2, en c_3.

(a) Aan welke condities moeten de drie constanten voldoen indien $\mathbf{v}$ een statisch electrisch veld $\mathbf{E}$ beschrijft. Wat is dan de ladingsdichtheid ρ?

(b) En wat zijn de condities voor c_1, c_2, en c_3 indien $\mathbf{v}$ een statisch magneetveld $\mathbf{B}$ beschrijft. Wat is dan de stroomdichtheid $\mathbf{J}$?

Opgave 2 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.
We beschouwen een metalen electrode in contact met een verdund (gasvormig) plasma met dielectrische permittiviteit ϵ_0 (dus gelijk aan de permittiviteit van vacuum). De electrode zit in de halfruimte $z < 0$, het plasma zit in de halfruimte $z > 0$, en het grensvlak tussen electrode en plasma is het vlak $z = 0$. Op $z \to \infty$ is het plasma geaard op potentiaal nul; het electrisch veld is daar dus ook nul. Het plasma heeft voor $z > 0$ een gegeven ladingsdichtheid $\rho(z) = \rho_0 \exp(-kz)$ met constante $\rho_0 > 0$ en constante $k > 0$ die we beide bekend veronderstellen; voor $z < 0$ geldt uiteraard $\rho(z) = 0$. We beschouwen het vlak $z = 0$ als oneindig groot zonder rand, zodat er geen afhankelijkheid is van x en y in dit probleem. Het systeem is globaal ladingsneutraal. [De volgorde van (b) en (c) is willekeurig.]

(a) Waarom geldt $\rho(z) = 0$ voor $z < 0$?

(b) Bereken de potentiaal $V(z)$ in de gehele ruimte $-\infty < z < \infty$.

(c) Bereken de oppervlaktelading σ van de electrode; is deze positief of negatief?

Opgave 3 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.
Een dielectrische bol met straal R en electrische susceptibiliteit χ_1 zit in een oneindig groot medium met relatieve (dimensieloze) permittiviteit ϵ_2. De bol heeft een uniforme vrije oppervlakteladingsdichtheid σ_f, verder is er geen vrije lading.

(a) Bereken het "displacement field" $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, zowel binnen de bol ($|\mathbf{r}| = r < R$) als buiten de bol ($r > R$).

(b) Bereken de polarisatie $\mathbf{P}$ binnen en buiten de bol.

Opgave 4 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.
We beschouwen twee oneindig grote parallele vlakken parallel aan het xy-vlak, de bovenste op hoogte $z = d > 0$ en de onderste op hoogte $z = -d < 0$. De vlakken zitten in vacuum en bevatten geen netto lading, maar hebben wel twee tegengestelde oppervlaktestromen, namelijk $K\hat{\mathbf{y}}$ (naar rechts) in $z = d$ en $-K\hat{\mathbf{y}}$ (naar links) in $z = -d$, met $K > 0$.

(a) Beargumenteer waarom het resulterende magneetveld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ voor alle posities $\mathbf{r} = (x, y, z)$ loodrecht moet staan op $\hat{\mathbf{y}}$ en schets een geschikt aantal magnetische veldlijnen in het xz vlak met $x \in [-2d, 2d]$ en $z \in [-2d, 2d]$.

(b) Bereken $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Dezelfde twee oneindig grote parallele platen voeren nu geen stroom (dus $K = 0$) maar hebben wel allebei dezelfde oppervlakteladingsdichtheid $\sigma > 0$.

(c) Bereken het electrische veld tussen de twee platen, dus voor $-d < z < d$.

Opgave 5 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.

(a) Laat zien dat de Maxwell vergelijkingen voldoen aan de wet van behoud van lading.

(b) Leg kort uit waarom de Lorentzkracht geen arbeid kan verrichten.

Opgave 6 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.
Een oneindig lange cylindervormige spoel met straal R, lange as $\hat{\mathbf{z}}$, en met n windingen per eenheid lengte in de z-richting, voert een tijdsafhankelijke stroom $I(t)$. In het vlak $z = 0$ loopt een cirkelvormige stroomkring met straal $2R$ rondom de spoel.

(a) Bereken, binnen de quasi-statische benadering, de tijdsafhankelijke magnetische flux $\Phi(t)$ door de stroomkring.

(b) Als de stroomkring gemaakt is van een draad met diameter $d \ll R$ en een soortelijke weerstand ρ, welke stroom loopt dan door de stroomkring?

(c) What is de "electromotive force" die de *spoel* ondervindt door een tijdsafhankelijke stroom $i(t)$ in de *stroomkring*?

Opgave 7 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.
Een spoel met zelfinductie L staat in serie geschakeld met een weerstand R, een condensator met capaciteit C, en een ideale bron met tijdsafhankelijke tijdsbronspanning $V(t)$. De stroom door de kring noemen we $I(t)$ en de lading op de condensator noemen we $+Q(t)$ en $-Q(t)$.

(a) Geef uitdrukkingen voor het potentiaalsverschil over (i) de spoel, (ii) de weerstand, en (iii) de condensator.

(b) Laat zien dat $Q(t)$ voldoet aan een vergelijking van de vorm $a_2\ddot{Q}(t)+a_1\dot{Q}(t)+a_0Q(t) = V(t)$, en bereken de coefficienten a_0, a_1, en a_2; de vergelijking hoeft u niet op te lossen.

——————— Einde ———————