Tentamen Elektromagnetisme –14 april 2022, 9:00-12:00h -plus 30 minuten extra tijd indien van toepassing. Schrijf duidelijk met blauwe of zwarte pen, NIET met potlood, en begin elke opgave op een nieuw vel papier met daarop uw naam. Onleesbaar werk wordt niet nagekeken. Beargumenteer uw antwoorden kort en bondig. Dit is een gesloten-boek tentamen; het gebruik van elektronische hulpmiddelen (laptop, telefoon, rekenmachine, internet, whatsapp, etc) is niet toegestaan. Het gebruik van het bijgeleverde formuleblad is uiteraard wel toegestaan. Dit tentamen bestaat uit 18 onderdelen verdeeld over 4 opgaven. Met elk onderdeel kunnen maximaal 5 punten gescoord worden, dus 90 punten in totaal. Succes!

Opgave 1

Beschouw een statisch en sferisch-symmetrisch elektrisch veld $\mathbf{E} = (a/r^3)\hat{\mathbf{r}}$ voor $r > R$ en $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ voor $r < R$, met r de afstand tot de oorsprong, en $a > 0$ en $R > 0$ gegeven constanten.

(a) Bereken de ladingsverdeling $\rho(r)$ die dit veld veroorzaakt heeft, voor zowel $0 < r < R$ als $r > R$.

(b) Gebruik de wet van Gauss om de oppervlakteladingsdichtheid σ op $r = R$ uit te rekenen.

(c) Bereken de potentiaal $V(r)$ met $V(\infty) = 0$, zowel voor $0 < r < R$ als $r > R$.

We beschouwen nu een bol met straal R en een gegeven oppervlakteladingsdichtheid $\sigma(\theta) = \sigma_1 \cos\theta$, met $\sigma_1 > 0$ een gegeven constante, θ de (standaard) polaire hoek met de z-as, en r de (standaard) radiële afstand tot het middelpunt van de bol. Verder is er geen lading binnen of buiten de bol. De potentiaal voor $r \to \infty$ is nul.

(d) Bereken de totale lading Q en het dipoolmoment $\mathbf{p}$ van deze bol.

(e) Bereken de potentiaal $V(r, \theta)$ op grote afstand van de bol.

(f) Schets ongeveer 10 geschikt gekozen elektrische veldlijnen (met richting) in het $x - z$ vlak met het middelpunt van de bol in de oorsprong, dus met $z = r\cos\theta$ en $x = r\sin\theta$; kies $\theta \in [0, \pi]$ en $r \in [0, 4R]$, dus $|x| < 4R$ en $|y| < 4R$.

Opgave 2 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.

We beschouwen een oneindig uitgestrekte diëlektrisch laag met gegeven relatieve diëlectrische constante $\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ en dikte $d > 0$ tussen het vlak $z = 0$ en $z = d$. Buiten de laag heerst vacuüm en is een uniform statisch elektrisch veld $E_0\hat{\mathbf{z}}$ aangelegd. Door het aangelegde elektrisch veld onstaat een uniforme polarisatie $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}$ binnen de laag met $\mathbf{E}$ het elektrische veld binnen de laag en χ_e de electrische susceptibiliteit. Er is geen vrije lading in de laag.

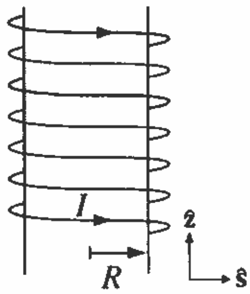
(a) Beargumenteer dat het displacement veld zowel binnen als buiten de laag gegeven wordt door $\mathbf{D} = \epsilon_0 E_0\hat{\mathbf{z}}$.

(b) Bereken $\mathbf{P}$ en $\mathbf{E}$ in de laag, dus voor $0 < z < d$, in termen van E_0.

(c) Schets de gebonden ladingsdichtheid als functie van $z \in [-d, 2d]$.

——— zie ommezijde ———

Opgave 3 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p. We beschouwen een oneindig lange cylindervormige strakgewonden spoel met straal R, lange as $\hat{\mathbf{z}}$, en met n windingen per eenheid lengte in de z-richting. De spoel voert een constante stroom I, die resulteert in een magneetveld $\mathbf{B}(z,s,\varphi)$ dat in het meest algemene geval geschreven kan worden als $B_z(z,s,\varphi)\hat{\mathbf{z}}+B_s(z,s,\varphi)\hat{\mathbf{s}}+B_\varphi(z,s,\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Het magneetveld gaat naar nul voor grote afstanden tot de spoel, dus voor $s \gg R$, met $s=0$ de symmetrieas van de spoel and φ de (standaard) azimuthale hoek.



(a) Reduceer de algemene vorm van $\mathbf{B}$ zo veel mogelijk op basis van symmetrie en de Maxwellvergelijkingen; beargumenteer kort.

(b) Gebruik de Maxwellvergelijkingen om de wet van Ampère in integraalvorm af te leiden, $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{omsl}$ met I_{omsl} de stroom omsloten door het gesloten pad, en gebruik dit resultaat (tweemaal) om $\mathbf{B}(z,s,\varphi)$ binnen ($s<R$) en buiten ($s>R$) de spoel te bereken.

We laten de spoel voor wat deze is en beschouwen nu een vierkante stroomkring met zijde $a>0$ in het vlak $z=0$. De draad van de stroomkring heeft dus een totale lengte $4a$, een zeer kleine dwarsdoorsnede A (dus $A \ll a^2$), en een soortelijke weerstand ϱ.

(c) Bereken de totale weerstand r van deze vierkante stroomkring in het vlak $z=0$.

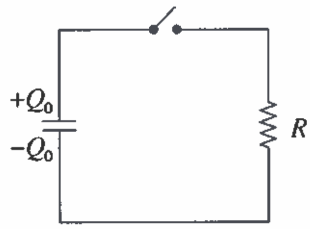
In het vlak $z=0$ heerst een tijdsafhankelijk magneetveld $\mathbf{B}(t) = B_z\hat{\mathbf{z}}\sin(\omega t) + B_x\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega t)$ met gegeven hoekfrequentie ω en amplitudines B_z en B_x.

(d) Bereken de magnetische flux $\Phi(t)$ door de stroomkring en de stroom $i(t)$ (grootte en richting) die in de stroomkring gaat lopen.

Opgave 4 —begin op een nieuwe vel met daarop uw naam s.v.p.

(a) Leg uit waarom de Lorentzkracht geen arbeid kan verrichten op een bewegende lading.

(b) Een condensator met capaciteit C is opgeladen tot een lading Q_0. Op $t=0$ wordt de condensator in serie geschakeld met een weerstand R. Laat zien dat de lading op de consensator als een functie van de tijd wordt gegeven door $Q(t) = Q_0\exp(-t/RC)$.



(c) Wat was op $t=0$ de energie van de condensator uit (b), en waar is deze energie gebleven op $t \gg RC$?

(d) Beredeneer of twee elektrisch neutrale parallele stroomdraden met een gelijkgerichte stroom elkaar aantrekken of afstoten of vanwege de neutraliteit helemaal niet wisselwerken.

Het behoud van elektrische lading volgt uit de Maxwellvergelijkingen.

(e) Toon dit aan door de continuïteitsvergelijking voor lading ($\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{J}$) af te leiden uit de Maxwellvergelijkingen.

Einde

♡ Sofie