Elektromagnetisme tentamen 2022 uitwerking Jesse Straat

Opgave 1

a) Gauss's law: $\rho_{(r)} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{a}{r^3}\hat{r} & r>R \\ \vec{0} & r<R \end{cases} = \begin{cases} \frac{a}{r^4}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) & r>R \\ \vec{0} & r<R \end{cases}$$

↳ ~~you~~ je kunt divergentie ook Cartesisch berekenen!

$\cancel{\nabla_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A\right.}$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \begin{cases} \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}}\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{a}{r^3}\right) & r>R \\ 0 & r<R \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r^2}\left(-\frac{a}{r^2}\right) & r>R \\ 0 & r<R \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{a}{r^4} & r>R \\ 0 & r<R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \begin{cases} -\frac{\varepsilon_0 a}{r^4} & r>R \\ 0 & r<R. \end{cases}$$

b) ~~De surface charge density moet precies de charge density voor r>R cancelen, zodat het elektrische veld binnen de sfeer nul is.~~

$\cancel{\int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 a}{r^4}\,dr = -\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 a}{r^3}\Big|_{r=R}^{r=\infty} = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 a}{R^3}}$.

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r} \Rightarrow \sigma = \frac{a}{R^2}\varepsilon_0$$

c)

$$V(r) = V(r) - V(\infty) = \int_\infty^r \nabla V(r')\cdot(-d\vec{r}')$$

$$= \int_\infty^r \vec{E}(r')\cdot d\vec{r}'$$

$$= \begin{cases} \int_\infty^r \frac{a}{r'^3}\,dr' & \text{if } r>R, \\ \int_\infty^R \frac{a}{r'^3}\,dr' + \int_R^r 0\,dr' & \text{if } r<R. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{a}{r^2} & \text{if } r>R, \\ -\frac{1}{2}\frac{a}{R^2} & \text{if } r<R. \end{cases}$$

d)

$$Q = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sigma(\theta)\, R^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sigma_1 \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\cdot\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}{4i} = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

$$Q = \pi R^2 \sigma_1 \int_0^{\pi} \sin(2\theta)\, d\theta$$
$$= -\frac{\pi R^2 \sigma_1}{2} \cos(2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$
$$= 0.$$

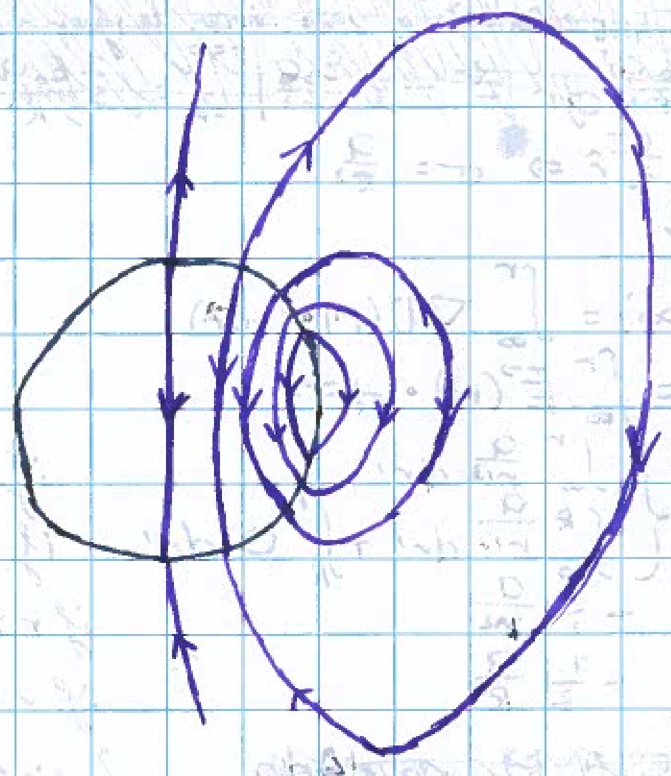
Symmetrie $\Rightarrow \vec{p} \parallel \hat{z}$, dus

$$p = \int z\sigma\, da = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R\cos\theta\, \sigma_1 \overset{\cos\theta}{\cancel{}}\, R^2 \overset{\sin\theta}{\cancel{}}\, d\theta\, d\varphi$$
$$= 2\pi R^3 \sigma_1 \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$
$$= 2\pi R^3 \sigma_1 \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^3 \sigma_1 (1+1) = \frac{4\pi R^3 \sigma_1}{3}$$
$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{4\pi R^3 \sigma_1}{3}\hat{z}.$$

e) Op grote afstand telt alleen de laagste orde pool mee voor de potentiaal. Nu is $Q=0$, dus telt alleen de dipool:

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\, \vec{p}\cdot\vec{r}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0 r^3}\frac{R^3\sigma_1}{3}\, r\cos\theta$$
$$= \frac{\sigma_1 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta.$$

f)



Opgave 2

a) Buiten de laag: $\vec{E} = E_0\hat{z} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 E_0 \hat{z}$, want het is een vacuum.

$\cancel{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$

$\cancel{\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 E_0 \hat{z} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}}$

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f = 0$, aangezien er geen vrije lading is

en geen vrije surface charge $\Rightarrow \vec{D}$ is continu en dus

$\vec{D} = \varepsilon_0 E_0 \hat{z}$ in de laag.

b) $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$

$\overset{\shortparallel}{\varepsilon_0 E_0 \hat{z}} \qquad \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{1+\chi_e} E_0\hat{z}$ in de laag

$\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \frac{\chi_e}{1+\chi_e} E_0 \hat{z}$

$= \varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{1+\chi_e}\right) E_0 \hat{z}.$

c) $\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P} = 0$

$$\sigma_b(z) = \begin{cases} \varepsilon_0\left(1-\frac{1}{1+\chi_e}\right)E_0 & z = d, \\ -\varepsilon_0\left(1-\frac{1}{1+\chi_e}\right)E_0 & z = 0, \\ 0 & \text{andere gevallen.} \end{cases}$$

Opgave 3

a) Welke richting gaat $\vec{B}$ op?

$\hat{z}$: onmogelijk: dan zou de richting omdraaien als de stroom omdraait:

$I \longrightarrow -I \Rightarrow B_s \longrightarrow -B_s$, maar dit is hetzelfde als de solenoide omdraaien, waarbij B_s hetzelfde blijft.

$\hat{\varphi}$: onmogelijk: door Ampère's law is

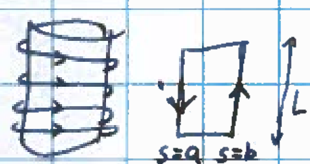
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ voor het pad z, s constant, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Dus is $\int_0^{2\pi} B_\varphi \, d\varphi = 0$. Bovendien kan $\vec{B}$ door symmetrie alleen afhangen van s, dus is $B_\varphi = 0$.

$\Rightarrow \vec{B}(s) \parallel \hat{z}$.

Bovendien: in de spoel is $B_z > 0$ en buiten de spoel $B_z < 0$, d.m.v. rechterhandregel.

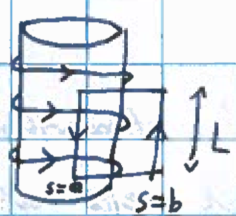
b) Beschouw de volgende Ampère loop:



$\Rightarrow 0 = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = L\left(B_z(b) - B_z(a)\right)$

$\Rightarrow B_z$ is constant buiten de spoel

$\Rightarrow B_z(s) = 0$ voor $s > R$.



$\Rightarrow -\mu_0 n I L = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = L\left(B_z(b) - B_z(a)\right)$
$= -L B_z(a)$

$\Rightarrow B_z(a) = +\mu_0 n I$.

Ergo, $\vec{B}(s) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & \text{als } s < R, \\ \vec{0} & \text{als } s > R. \end{cases}$

c) $r = \dfrac{L\rho}{A} = \dfrac{4a\rho}{A}$

d) $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_0^a \int_0^a B_z \sin(\omega t) \, dx \, dy = a^2 B_z \sin(\omega t)$.

$\mathcal{E} = -a^2 \omega B_z \cos(\omega t)$

$\Rightarrow I = V/r = -\dfrac{A a \omega B_z}{4\rho} \cos(\omega t)$ tegen de klok in $\Rightarrow \dfrac{A a \omega B_z}{4\rho} \cos(\omega t)$ met de klok mee

Opgave 4

a) In het geval van een bewegende lading hebben we

$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, hierdoor is $\vec{F}$ altijd loodrecht op de snelheid $\vec{v}$, zodat de arbeid wordt gegeven door

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\,dt = 0.$$

$\Rightarrow$ er wordt geen arbeid verricht.

b) $$C = \frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{Q(t)}{I(t)R}$$

$\Rightarrow \frac{I(t)}{Q(t)} = \frac{1}{CR}$. Nu is $I(t) = -\frac{dQ}{dt}$, dus

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{CR}\,dt$$

$$\ln\left|\frac{Q(t)}{Q_0}\right| = -\frac{1}{CR}\,t$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0\, e^{-t/CR}.$$

c) $$W = \tfrac{1}{2} C V^2 = \tfrac{1}{2} C\, I(t)^2 R^2$$
$$= \tfrac{1}{2} C R^2 \left(\frac{Q_0}{CR} e^{-t/CR}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}\, e^{-2t/CR}$$

$\Rightarrow$ op $t=0$ is de energie $\tfrac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$.

Op $t \gg RC$ is deze energie omgezet in warmte door de weerstand.

d) 

Zie de schets. De linker stroomdraad genereert een magnetisch veld dat bij de rechter draad de pagina ingaat.

Door de Lorentzkracht geeft dit een aantrekking.

e) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \varepsilon_0\, \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J})$$
$$= -c^2 \varepsilon_0 \mu_0\, \nabla \cdot \vec{J} = -\nabla \cdot \vec{J}.$$

Aangezien $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$.