Hertentamen Elektromagnetisme –5 juli 2020, 13:30-16:30h (plus eventueel extra tijd indien van toepassing). Schrijf duidelijk met blauwe of zwarte pen, NIET met potlood. Onleesbaar werk wordt niet nagekeken. Beargumenteer uw antwoorden kort en bondig. Dit is een gesloten boek tentamen, dus behalve het bijgeleverde formuleblad is het gebruik van het boek, eigen aantekeningen, of elektronische hulpmiddelen niet toegestaan. Dit tentamen bestaat uit 21 onderdelen verdeeld over 6 opgaven. Met elk onderdeel kunnen maximaal 5 punten gescoord worden, dus 105 punten in totaal. Succes!

Opgave 1 -schrijf je naam op een nieuw vel
Beschouw twee puntladingen q_1 en q_2 op vaste posities $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$, respectievelijk, in vacuum.

✓ (a) Geef een uitdrukking voor de elektrische kracht $\mathbf{F}$ die q_2 uitoefent op q_1.

✓ (b) Bereken (of geef) de minimale energie die benodigd was om q_1 en q_2 vanuit oneindig grote onderlinge afstand op positie $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{r}_2$ te krijgen.

✓ (c) Geef de orde van grootte van de elektrische kracht tussen twee elementaire ladingen op onderlinge afstand van 1nm (dit is 10^{-9}m).

Opgave 2
De potentiaal op positie (x, y, z) wordt gegeven door $V(x, y, z) = \frac{1}{2}k\ln[(x^2 + y^2)/a^2]$ met $k > 0$ en $a > 0$ gegeven (positieve) constanten.

✓ (a) Bereken het elektrisch veld $\mathbf{E}(x, y, z)$.

(b) Bereken het referentiepunt van deze potentiaal en leg kort uit of de lading die deze potentiaal veroorzaakt positief of negatief is. E-veld is neg, E-veld wijst weg van pos. lading

(c) Laat zien dat de lading die deze potentiaal veroorzaakt alleen op de z-as kan zitten, dus alleen op $(0, 0, z)$ met $-\infty < z < \infty$.

✓ (d) Geef (met motivatie) of bereken $\nabla \times \mathbf{E}$.

Opgave 3
We beschouwen een geladen cirkelvormige schijf met straal R in het xy-vlak, dus in het vlak $z = 0$. De schijf, met middelpunt in de oorprong, heeft voor $0 \leq s \leq R$ een oppervlakteladingsdichtheid $\sigma(s)$ met $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ de afstand tot het middelpunt; σ hangt dus alleen van de afstand s af. Buiten de schijf zit geen lading en heerst vacuum.

✓ (a) Stel zo expliciet mogelijk een integraal op voor de potentiaal $V(0, 0, z)$ op de symmetrie-as (dus de z-as) als functie van de "hoogte" z boven/onder het middelpunt.

✓ (b) Los de integraal van (a) op indien $\sigma(s) = \sigma_0$ is, dus een constante.

✓ (c) Schets voor $\sigma_0 > 0$ een geschikt aantal veldlijnen buiten de schijf in (i) het $x - z$ vlak en (ii) het $x - y$ vlak. Geef duidelijk aan waar de lading zit, en beschouw ladingsvrije gebieden tot op een afstand van, zeg, $4R$ van de oorsprong.

——— zie ommezijde voor opgave 4, 5, en 6 ———

Opgave 4

We beschouwen een (3-dimensionale) bol van straal R, met ladingsdichtheid $\rho(r) = br$ voor $0 \leq r \leq R$ met $b > 0$ een gegeven constante en $r \geq 0$ de afstand tot het middelpunt van de bol. Buiten de bol zit geen lading.

(a) Beredeneer of deze bol van puur goud gemaakt zou kunnen zijn. En bereken de totale lading Q van de bol.

(b) Bereken het elektrisch veld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ voor willekeurige positie $\mathbf{r}$ buiten de bol, dus voor $|\mathbf{r}| = r > R$.

(c) Bereken de elektrische potentiaal $V(\mathbf{r})$ buiten de bol, met als referentie dat de potentiaal nul is op oneindige afstand van de bol.

(d) Bereken het elektrisch veld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ binnen de bol, dus voor $0 < r < R$.

(e) Schets de potentiaal $V(r)$ voor $0 < r < 4R$.

Opgave 5

(a) Leg uit waarom twee neutrale parallele stroomdraden elkaar aantrekken, afstoten, of niet voelen indien er een constante maar tegengestelde stroom door beide draden loopt.

(b) Gebruik de wet van Biot-Savart om het magneetveld $\mathbf{B}$ te bereken in het middelpunt van een cirkelvormige stroomkring met straal R die een constante stroom I voert.

(c) Een onderzoekr wil een statisch magneetveld aanleggen dat op positie (x, y, z) wordt gegeven door $\mathbf{B} = b(x, y, -z)/r$ met $b = 1$ T en $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Leg uit of dit mogelijk of.

(d) Een cirkelvormige stroomkring met straal a en weerstand R ligt in het xy vlak met normaal $\hat{z}$. In dit vlak heerst een tijdsafhankelijk maar ruimtelijk homogeen magneetveld $B_z\hat{z}\sin(\omega t) + B_y\hat{y}\cos(\omega t)$ met B_z, B_y, en ω gegeven constanten en met $\hat{y}$ de richting van de y-as. Bereken eerst de flux $\Phi(t)$ omsloten door de stroomkring en dan de stroom $I(t)$ in de kring.

Opgave 6

Een spoel met een zelfinductie L is in serie geschakeld met een batterij en een weerstand R. De batterij is ideaal en levert een tijdsafhankelijke bronspanning $V(t)$. Hierdoor voldoet de stroom in de kring aan $V(t) = I(t)R + L\dot{I}(t)$ met $\dot{I} = dI/dt$.

(a) Bereken $I(t)$ voor $t > 0$ voor het geval dat de bronspanning op $t = 0$ plots wegvalt naar nul nadat deze voor $t < 0$ zeer lang de constante waarde V_0 gehad heeft.

Aan de stroomkring wordt nu tevens een condensator met capaciteit C in serie geschakeld met de andere elementen. De lading op de twee condensatorplaten noemen we $\pm Q(t)$. De batterij geeft weer een gegeven spanning $V(t)$.

(b) Stel een differentiaalvergelijking op voor $Q(t)$ —oplossen is niet nodig.

———————— EINDE ————————

Liefs Sofie