Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s\, v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s\, v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian: $\nabla^2 f = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial f}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Spherical.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Cylindrical.

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

Triple Products

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

Fundamental Theorems

Gradient Theorem: $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem: $\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem: $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

Maxwell's Equations

In general:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

In matter:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Auxiliary Fields

Definitions:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

Linear media:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{cases}$$

Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Fundamental Constants

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \mathrm{C^2/Nm^2}$ (permittivity of free space)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{N/A^2}$ (permeability of free space)

$c = 3.00 \times 10^{8} \mathrm{m/s}$ (speed of light)

$e = 1.60 \times 10^{-19} \mathrm{C}$ (charge of the electron)

$m = 9.11 \times 10^{-31} \mathrm{kg}$ (mass of the electron)

Standard Integrals $(a > 0)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \left[\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left[\frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left[\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \right]$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left[\mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} \right]$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \left[\pm \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right]$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right]$$

Tussentoets Electromagnetisme —10 maart 2022, 8:30-10:30h. Dit is een **gesloten** boek tentamen. Het bijgevoegde formuleblad kan gebruikt worden —maar geef wel duidelijk aan indien u hier gebruik van maakt. Schrijf duidelijk met blauwe of zwarte pen, NIET met potlood. Onleesbaar werk wordt niet nagekeken. Beargumenteer uw antwoorden kort en bondig. Het gebruik van elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan. Deze toets bestaat uit 14 onderdelen verdeeld over drie opgaven. Met elk onderdeel zijn maximaal 5 punten te verdienen, dus 70 punten maximaal. Maak iedere opgave op een aparte pagina. Succes!

Opgave 1

Een zeer lange cilinder met straal R heeft voor $0 \leq s \leq R$ een volumeladingsdichtheid $\rho(s) = ks^3$ met k een constante en s de (kleinste) afstand tot de centrale as van de cilinder. Buiten de cilinder zit geen lading en de cilinder is zo lang dat eindeffecten verwaarloosbaar zijn.

(a) Bereken de totale lading per eenheid lengte, λ, van deze cylinder.

(b) Bereken het elektrisch veld $\mathbf{E}(s)$ voor $s \leq R$.

Beschouw wederom een zeer lange massieve cylinder, met straal R en met een lengte $L \gg R$. Deze cylinder is gemaakt van puur zilver en is electrisch geladen met een gegeven totale lading $Q > 0$.

(c) Leg uit waar de lading zich bevindt.

(d) Schets, met argumentatie, de grootte van het elektrische veld, zowel voor $0 \leq s < R$ als voor $s > R$. Verwaarloos hierbij eind-effecten.

(e) Bereken de elektrische potentiaal $V(s)$ voor $s \geq 0$ met als referentie $V(R) = 0$.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel papier met hierop uw naam

We beschouwen een cirkelvormige ring met symmetrie-as $\hat{\mathbf{z}}$, straal R, en constante statische lijnladingsdichtheid λ. De dikte van de ring is verwaarloosbaar klein (dus zeer veel kleiner dan de straal R).

(a) Bereken de potentiaal $V(z)$ op afstand z boven het middelpunt van de ring. Kies hierbij de potentiaal voor $z \to \infty$ als nulpunt.

(b) Schets voor $\lambda > 0$ een aantal (bijv. 10) elektrische veldlijnen (uiteraard met richting) in het xz-vlak, voor $x \in [0, 5R]$ en $z \in [-5R, 5R]$; hier staat de x-as loodrecht op de symmetrie-as $\hat{\mathbf{z}}$. De ring is dus het punt $(x, z) = (R, 0)$ in dit vlak.

Behalve de ring is er nu ook een puntlading q op positie $(0, 0, h) = h\hat{\mathbf{z}}$, dus op "hoogte" h boven de geladen ring.

(c) Geef een (expliciete) uitdrukking voor de electrische kracht van de ring op de lading q als functie van h, R, en λ.

(d) Bereken de minimale arbeid die geleverd moet worden om de ~~ring~~ Puntlading vanaf oneindig grote afstand tot h te brengen.

—zie ommezijde —

Opgave 3 —begin s.v.p. op een nieuw vel papier met hierop uw naam

Beschouw een zeer grote geaarde geleider in de halfruimte $z \leq 0$ en twee even grote puntladingen q op de z-as, de ene op $(0, 0, d)$ en de andere op $(0, 0, 2d)$ (dus boven elkaar op hoogte $z = d$ en $z = 2d$ boven de geleider, respectievelijk), met $d > 0$. Behalve de twee puntladingen bevat de halfruimte buiten de geleider, dus $z > 0$, verder geen lading; de potentiaal oneindig ver weg van de puntladingen (dus op afstanden veel groter dan d) is nul.

(a) Geef de grootte en de positie van de twee spiegelladingen die, voor $z > 0$ en zonder geleider, een potentiaal $V(x, y, z)$ geeft die identiek is aan de potentiaal van de twee ladingen met de geleider.

(b) Bereken de kracht (grootte en richting) op de lading op positie $(0, 0, d)$.

(c) Bereken het dipoolmoment van de combinatie van ladingen en spiegelladigen.

De twee ladingen in de halfruimte $z > 0$ worden nu vervangen door een gegeven ladingsverdeling $\rho(z) = D \exp(-kz)$ met $D > 0$ en $k > 0$ gegeven constanten. De geleider in $z \leq 0$ is nog steeds geaard, het electrisch veld voor $z \to \infty$ is nul, maar door de grote hoeveelheid lading is de potentiaal in het oneindige niet noodzakelijkerwijs nul meer.

(d) Beredeneer dat $V(z) = a \exp(-kz) + bz + c$ de algemene vorm is van de potentiaal voor $z \geq 0$, voor nader te bepalen coefficienten a, b, en c.

(e) Bepaal a, b, en c en schets de resulterende potentiaal $V(z)$ voor $z \in [-5/k, 5/k]$.

——— Einde ———