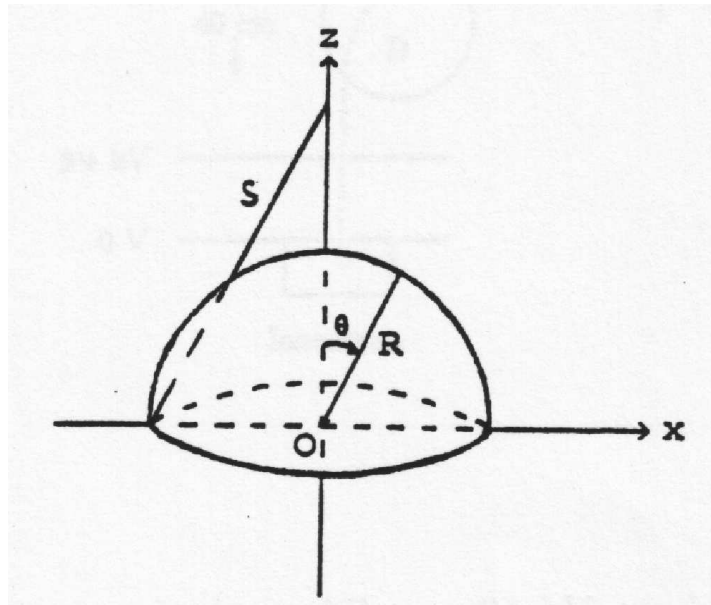


Electromagnetisme (NS-103b)

17 mei 2004

Opgave 1

Een half boloppervlak (straal R) van niet-geleidend materiaal bevindt zich in vacuüm met permitiviteit ϵ_0 . Over het halve boloppervlak is een hoeveelheid positieve lading Q verdeeld. We kiezen de oorsprong O in het middelpunt van het halve boloppervlak en het x, y -vlak door de rand ervan. De positieve z -as snijdt het oppervlak in $z = R$ (zie figuur). Ten opzichte van het oneindige is de potentiaal in de oorsprong V_0 . De afstand tussen een punt op de z -as en de rand van het halve boloppervlak geven we aan met s , dus $s^2 = z^2 + R^2$.



- a) De lading Q is willekeurig verdeeld over het halve boloppervlak. Hoe groot is V_0 , de potentiaal in de oorsprong, uitgedrukt in Q , R , en ϵ_0 ?
 De grootte van de veldsterkte in O ligt tussen twee uiterste waarden. Welke zijn deze uiterste waarden en de daarbij behorende ladingsverdelingen? (10 punten)

Voor de rest van de opgave geldt dat de lading Q *homogeen* verdeeld is over het halve boloppervlak.

- b) We bekijken nu punten van de positieve z -as met $z > R$. Leid af dat voor deze punten de potentiaal gegeven wordt door

$$V(z) = V_0 \left(\frac{s+R}{z} - 1 \right)$$

Wat wordt $V(z)$ in de benadering $z \gg R$? (15 punten)

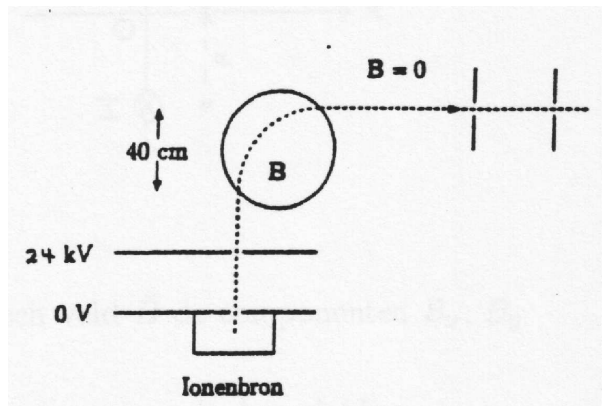
- c) Bepaal nu, via de potentiaal, de veldsterkte voor de z -as met $z > R$ en breng deze in de vorm $E(z) = \frac{\text{constante}}{R(\frac{z}{R}-1)}$. Wat is de constante? (12 punten)

Opgave 2

Koolstofhoudend materiaal is (vaak) te dateren door de verhouding te bepalen van de hoeveelheden ^{14}C (halveringstijd ongeveer 6000 jaar) en ^{12}C (stabiel). Met de Van de Graaffversneller van de Universiteit Utrecht worden tegenwoordig dergelijke “Koolstof-14-dateringen” uitgevoerd.

Een (zeer klein) koolstofsamplje wordt daartoe in de ionenbron omgezet in *eenwaardig negatieve* ionen $^{14}\text{C}^-$ en $^{12}\text{C}^-$, die daarna worden versneld. Een eerste massa-selectie vindt vervolgens plaats m.b.v. een magneet. Na een aantal avonturen die we U zullen besparen bereiken de $^{14}\text{C}^-$ - en $^{12}\text{C}^-$ -ionen tenslotte de detectoren die hun aantallen bepalen.

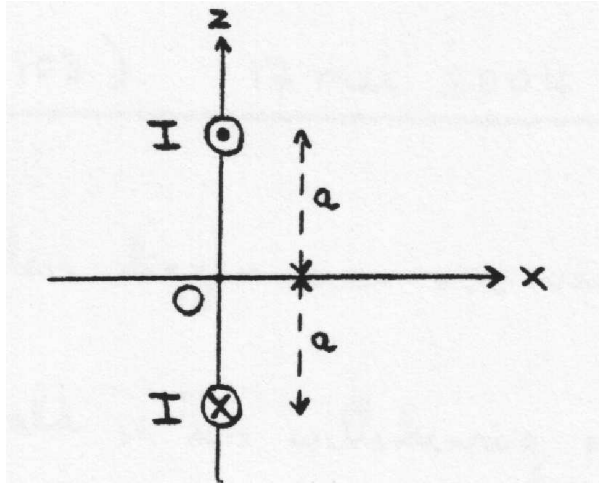
De versnelling van de ionen vindt plaats over een potentiaalverschil van 24 kV en de magneet heeft over een cirkelvormig gebied een homogeen \vec{B} -veld, loodrecht op het vlak van tekening; buiten de cirkel geldt $\vec{B} = \vec{0}$. De ionenbaan wordt over een hoek van 90° afgebogen, met een kromtestraal $R = 40$ cm; zie de figuur, waarin de stippellijn het traject van de ionen aangeeft.



- Bepaal richting en sterkte (in Tesla) van het \vec{B} -veld dat nodig is voor de afbuiging van de $^{14}\text{C}^-$ -ionen (massa 14 u). [$m = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg en $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.] (9 punten)
- Welke versnелspanning is nodig om bij ditzelfde magneetveld de $^{12}\text{C}^-$ -ionen (massa 12 u) i.p.v. de $^{14}\text{C}^-$ -ionen het traject te laten doorlopen? (9 punten)
- Het magneetveld wordt opgewekt door een electromagneet waarbij een stroom loopt door windingen van koperdraad. Wegens de weerstand van het koperdraad wordt in de spoelen van de magneet dus een zeker vermogen gedissipeerd. Is het totale vermogen dat de stroombron moet leveren voor het afbuigen van de $^{14}\text{C}^-$ -ionen hetzelfde als dat voor de $^{12}\text{C}^-$ -ionen? Waarom (niet)? Is dit vermogen afhankelijk van de intensiteit van de $^{12}\text{C}^-$ -, $^{14}\text{C}^-$ -ionenstroom die moet worden afgebogen? Waarom (niet)? (9 punten)

Opgave 3

Twee dunne, zeer lange, evenwijdige draden, in het $x = 0$ -vlak op afstand $2a$ van elkaar, voeren even grote stromen I , maar tegengesteld gericht. Voor de draad bij $z = +a$ is de richting $(-\hat{y})$ en bij $z = -a$ is de richting \hat{y} (zie figuur).



- a) In een willekeurig punt in de ruimte heeft het magnetisch veld \vec{B} de componenten B_x , B_y , en B_z . Aan welke restricties zijn deze componenten onderworpen voor de drie vlakken
1. $x = 0$
 2. $y = 0$
 3. $z = 0$

Hoe is voor punten van de x -as de veldsterkte gericht? (9 punten)

- b) Bereken voor punten van de x -as de grootte van $B(x)$. Waar is $B(x)$ maximaal? Wat wordt $B(x)$ voor $x \gg a$? (9 punten)
- c) Voor punten van de cirkel in het $y = 0$ -vlak met middelpunt O en straal R , met R zeer groot t.o.v. a ($R \gg a$), geldt in goede benadering voor de grootte van de veldsterkte $B(R) = \frac{\text{constante}}{R^2}$. Beschouw nu, in het $y = 0$ -vlak, de gesloten contour gevormd door de x -as van $x = -R$ tot $x = +R$ en de halve cirkelboog, met centrum O en straal R , door $z = +R$. Laat zien dat voor deze contour in de limiet van $R \rightarrow \infty$ geldt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint \vec{B} d\vec{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$$

en verifieer de Wet van Ampère. Hint: $\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \arctan \alpha$. (9 punten)

- d) In het vlak van tekening beschouwen we nu de gesloten contour gevormd door de z -as van $z = -R$ tot $z = +R$ en de halve cirkelboog, met centrum O en straal R , door $x = +R$. Bepaal $\oint \vec{B} d\vec{l}$ in de limiet voor $R \rightarrow \infty$ en verifieer de Wet van Ampère. (9 punten)