JULIUS INSTITUUT, FACULTEIT NATUUR- EN STERRENKUNDE, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–Eskwadraat.
HET COLLEGE NS-103B WERD IN 2003/2004 GEGEVEN DOOR G.A.P. ENGELBERTINK.

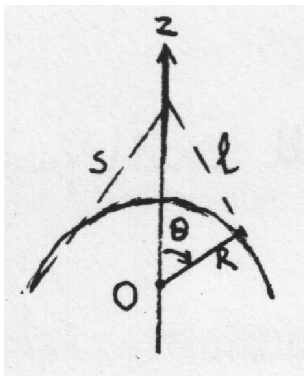
Uitwerking[1] Electromagnetisme (NS-103b)
17 mei 2004

N.B. Zie voor de vragen het tentamen. Hier beperk ik me tot de oplossingen.

Opgave 1

a) $V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, want alle willekeurige ladingsdelen liggen even ver van Q.
$E(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$, wanneer de lading is samengebald in een willekeurig punt.
$E(0) = 0$, wanneer de lading homogeen over de rand verdeeld is.

b) $s^2 = z^2 + R^2$
$l^2 = R^2 \sin^2\theta + (z - R\cos\theta)^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta$
$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{2\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$



$$\begin{aligned}
V(z) &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\pi R\sin\theta)(R\ \mathrm{d}\theta)\sigma}{4\pi\epsilon_0 \ell} \\
&= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\ \mathrm{d}\theta}{\ell} \\
&= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\ \frac{1}{zR}\ \Big[\ell\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{V_0}{2}\Big[\ell\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{V_0}{2}\{s - (z - R)\} \\
&= V_0\left(\frac{s+R}{z} - 1\right) \\
&= V_0\left(\sqrt{\frac{\frac{s}{R}+1}{\frac{s}{R}-1}} - 1\right)
\end{aligned}$$

Voor $z \gg R$ wordt $s = z$ en dus $V(z) = V_0\frac{R}{z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$, zoals verwacht.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@A-Eskwadraat.nl`

c) $E = -\frac{\partial V}{\partial z}$ of

$$\begin{aligned}
-\frac{E}{V_0} &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\sqrt{R^2+z^2}+R}{z}\right\} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{2}\left(R^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2z + \left(\sqrt{R^2+z^2}+R\right)\frac{-1}{z^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s+R}{z^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s+R}{s^2-R^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s-R} \\
&= \frac{-R}{s(s-R)}
\end{aligned}$$

zodat $E = \frac{V_0 R}{s(s-R)} = \frac{V_0}{R}\frac{1}{\frac{s}{R}(\frac{s}{R}-1)}$, dus constante is $\frac{V_0}{R}$ (de relevante parameter is $\frac{s}{R}$).

Opgave 2

a) $\vec{B}$ staat het papier in gericht, dus $\otimes$. De versnelspanning V geeft de kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2 = eV$ en de centripetale kracht wordt geleverd door de Lorentzkracht $\frac{mv^2}{R} = evB$, zodat

$$B = \frac{1}{R}\frac{m}{e}v = \sqrt{\frac{2mV}{eR^2}} = \sqrt{\frac{28\ 1,66\ 10^{-27}\ 24\ 10^3}{1,6\ 10^{-19}\ 16\ 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{28\ 1,66\ 6\ 10^{-3}}{1,6\ 4}} = 0,21 \text{ Tesla}$$

b) Voor hetzelfde traject moet de grootheid mV gelijk blijven, dus

$$V_{^{12}C} = \frac{14}{12}V_{^{14}C} = \frac{14}{12}\ 24 \text{ kV } = 28 \text{ kV}$$

c) Het vermogen is voor alle ionen *hetzelfde*, want het magneetveld verricht geen arbeid. Ook de intensiteit doet er niet toe.

Opgave 3

a) 1. $B_y = 0, B_z = 0$ 2. $B_y = 0$ 3. $B_z = 0$
Voor punten van de x-as is het veld in de $\hat{x}$-richting.

b)

$$B(x) = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}}\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a}\right)\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}$$

Maximaal $\frac{\mu_0 I}{\pi a}$ voor $x = 0$ en voor $x \gg a$ wordt $B(x) = \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a}\right)\frac{a^2}{x^2}$.

c) Geen bijdrage aan de cirkelboog, omdat de lengte (:)R en het veld (:)$\frac{1}{R^2}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{\pi a}2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}2a\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \mu_0 I\frac{2}{\pi}\left[\arctan\infty - \arctan 0\right] = \mu_0 I$$

d) Geen bijdrage van de cirkelboog en geen bijdrage van de z-as, omdat $\vec{B} \perp$ z-as. Dus

$$\lim_{R\to\infty}\oint \vec{B}\ \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

wat in overeenstemming is met het omvatten van de *helft* van elke stroom.