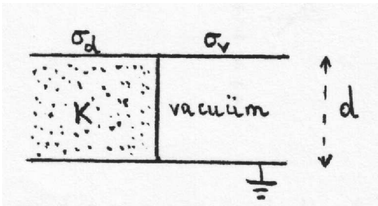
JULIUS INSTITUUT, FACULTEIT NATUUR- EN STERRENKUNDE, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–Eskwadraat.
HET COLLEGE NS-103B WERD IN 2003/2004 GEGEVEN DOOR G.A.P. ENGELBERTINK.

Electromagnetisme (NS-103b)
15 april 2004

Opgave 1

Een ideale vlakke plaatcondensator met oppervlak A en afstand d tussen de platen is voor de helft (zie figuur) gevuld met een diëlectrische constante K. De permittiviteit van vacuüm is ϵ_0.



a) Druk de capaciteit C van de condensator uit in A, d, ϵ_0, en K. *(8 punten)*

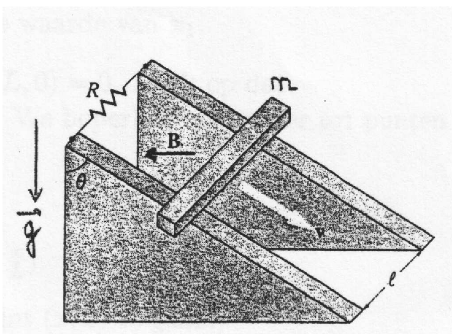
Op de bovenplaat wordt nu een positieve lading Q aangebracht, die zich zondanig over de binnenkant van de twee helften verdeelt dat $Q = \frac{1}{2}A\sigma_d + \frac{1}{2}A\sigma_v$ (hierbij zijn σ_d en σ_v hulpgrootheden, die we later zullen bepalen). In diëlectricum en vacuüm ontstaan dan, respectievelijk, de velden $\vec{E}_d$ en $\vec{E}_v$.

b) Voor welke waarde van K is σ_d gelijk aan σ_v? Wat is het verband tussen de groottes van $\vec{E}_d$ en $\vec{E}_v$ voor willekeurige K? Druk $\vec{E}_v$ uit in σ_v en ϵ_0. Hoe groot is het potentiaalverschil V tussen de platen, uitgedrukt in σ_v, ϵ_0, en d? *(10 punten)*

c) Leid nu, via $Q = CV$, het verband af tussen σ_d en σ_v. Druk tenslotte σ_d en σ_v uit in $\frac{Q}{A}$ en K. *(12 punten)*

Opgave 2

Een geleidende staaf met massa m glijdt door de zwaartekracht zonder wrijving naar beneden langs twee geleidende wiggen, zoals aangegeven in de figuur. Staaf en wiggen zijn weerstandsloos. De wiggen hebben onderlinge afstand l, zijn bovenaan verbonden via een weerstand R en maken een hoek θ met de verticaal. Het geheel bevindt zich in een homogeen magneetveld $\vec{B}$ dat *horizontaal* naar links wijst (zie figuur). Wanneer de staaf vanuit rust wordt losgelaten dan bereikt deze na enige tijd een constante eindsnelheid v_{eind}. De helling is daartoe voldoende lang.

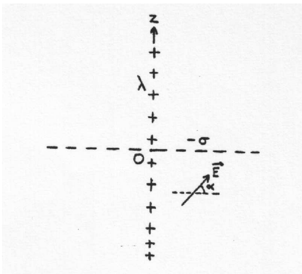


a) Hoe groot is v_{eind}, uitgedrukt in mg, B, l, R, en θ? Ga na dat de verticale component van v_{eind} onafhankelijk is van hoek θ. *(18 punten)*

b) Hoe groot zijn in de eindsituatie het vermogen geleverd door de zwaartekracht en het vermogen ontwikkeld in de weerstand R? *(12 punten)*

Opgave 3

Een oneindig lange lijnlading met homogene positieve lijnladingsdichtheid λ strekt zich langs de z-as uit van $-\infty$ tot $+\infty$. In de oorsprong O snijdt de lijnlading een oneindig grote ladingslaag met homogene negatieve oppervlakteladingsdichtheid $-\sigma$ (dus $\sigma > 0$). De ladingslaag valt samen met het vlak $z = 0$. Om de sterktes van de ladingsverdelingen aan elkaar te kunnen relateren voeren we de parameter L in, gedefinieerd door $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi}{2}L$. Herinnering: het veld van een oneindige lijnlading is $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ en dat van een oneindige ladingslaag is $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.



a) De snijlijn van een willekeurig vlak door de z-as met het $z = 0$-vlak, noemen we de x-as. Leg uit dat het veld in de gehele ruimte bekend is, wanneer het bekend is in het z, x-vlak voor positieve x. Wat is de dimensie L? Verifieer dat $|\vec{E}(x, z)|$ alleen van x afhangt. Teken voor enkele punten van de lijn $x = \frac{1}{2}L$ (behalve $z = 0$) de veldsterkte $\vec{E}(z)$, zowel voor positieve als voor negatieve z. *(7 punten)*

b) In een punt met $z < 0$ en $x > 0$ maakt $\vec{E}$ een hoek α met de horizontaal (zie figuur). Hoe groot is $\tan\alpha$ (en dus $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$)? Leid hieruit af dat de veldlijn die door het punt $-z_1$ op de z-as gaat, beschreven wordt door de vergelijking $z = -z_1 + \frac{x^2}{L}$. Deze veldlijn snijdt de x-as in x_1. Hoe groot is x_1? Wat is de vergelijking voor de veldlijn die ontstaat op de positieve z-as en eindigt in x_1? *(6 punten)*

c) Beschouw de twee veldlijnen die ontspringen op de z-as in respectievelijk z_1 en $-z_1$ en eindigen in x_1 op de x-as. Rotatie hiervan rond de z-as geeft in de ruimte een gesloten oppervlak A. Hoe groot is de totale flux door A? Bereken nu, via de stelling van Gauss, nogmaals de waarde van x_1. *(7 punten)*

d) We kiezen de potentiaal nul in het punt $(L, 0)$, dus $V(L, 0) = 0$. Merk op dat $V(x, z) = V(x, -z)$ en dat voor $x < L$ steeds $V > 0$ is. We beperken ons verder tot punten met positieve z. Leid af dat dan in een willekeurig punt geldt

$$V(x, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(z - \frac{L}{2}\ln\frac{x}{L}\right)$$

(bijvoorbeeld door van $(L, 0)$ via (L, z) naar het punt (x, z) te gaan.) Verifieer dat $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ en $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$. Wat is het verband tussen z en x voor de $V = 0$ equipotentiaallijn? Teken deze (voor $z \geq 0, x \geq L$ dus). Arceer in het z, x-vlak het gebied waar de potentiaal negatief is. *(10 punten)*

e) Geef de vergelijking van de veldlijn en de equipotentiaallijn die beide door het punt (L, L) gaan. Verifieer dat ze elkaar loodrecht snijden. *(10 punten)*