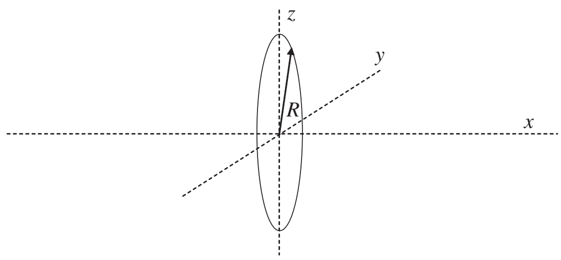
Tentamen ELE (NS-103b), 18 april 2007

- *Bij dit tentamen is het gebruik van rekenmachine, open boek of formuleblad niet toegestaan*
- *Geef, overal waar dat van toepassing is, aan hoe je gebruik maakt van symmetrie om de richting van het veld te bepalen, op grond van welke overwegingen je integratiepaden en oppervlakken kiest, en waardoor toegepaste vereenvoudigingen (integralen, vectorproducten, reeksontwikkelingen etc.) gerechtvaardigd zijn.*
- *De opgaven worden nagekeken door verschillende assistenten. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.*
- Tentamencijfer $= \frac{10+\text{behaald aantal punten}}{10}$. *Als je tentamencijfer hoger is dan je gemiddelde cijfer voor de inleveropgaven dan is je tentamencijfer ook je eindcijfer. Als je gemiddelde voor de inleveropgaven hoger is dan geldt:* eindcijfer $= 0.15\times$cijfer inleveropgaven$+$ $0.85\times$ tentamencijfer.

SUCCES!

Opgave 1

Beschouw een positief geladen draadring met straal R en een uniform verdeelde lading Q. De ring ligt in het $x = 0$-vlak en is gecentreerd rond de x-as, zoals weergegeven in de figuur:



a Leid af dat het veld op de as van de ring, op afstand x van de oorsprong, gegeven wordt door: $\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{x}$. *(5 punten)*

b In één of meerdere punten op de as bereikt de veldsterkte een extreme waarde (minimum of maximum). Bereken de de ligging van dit punt/deze punten. *(5 punten)*

c Schets in een grafiek het verloop van de veldsterkte op x-as (voor zowel positieve als negatieve x). *(5 punten)*

Beschouw vervolgens een cirkelschijf met straal R die een uniform verdeelde oppervlaktelading σ draagt.

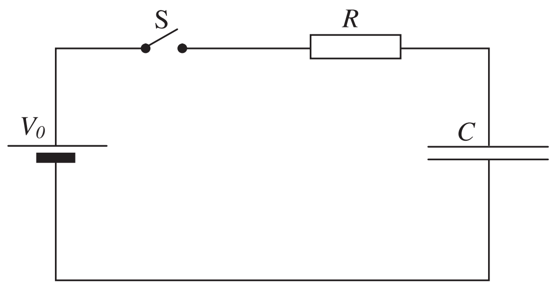
d Leid een uitdrukking af voor het veld op de as van de schijf op een afstand x van het middelpunt. Je kunt daarbij gebruik maken van de uitdrukking die gegeven is bij a) en van de volgende standaardintegraal: $\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. *(6 punten)*

e Toon aan dat de bij d) gevonden uitdrukking in de limiet voor $x \ll R$ gelijk is aan het veld van een oneindige vlakke plaat: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. *(5 punten)*

Begin hier op een nieuw blad

Opgave 2

Een condensator C, een weerstand R en een spanningsbron V_0 zijn geschakeld zoals aangegeven in onderstaande figuur.



De condensator bestaat uit twee parallelle cirkelvormige platen met straal r en onderlinge afstand d en is opgesteld in vacuüm. In de beginsituatie is de condensator niet geladen. Op $t = 0$ wordt schakelaar S gesloten; er loopt vanaf dat moment dus een stroom door het circuit.

- a Leid met behulp van de wet van Gauss een uitdrukking af voor de capaciteit van de condensator (je mag randeffecten verwaarlozen, maar geef wel aan hoe je van deze verwaarlozing gebruik maakt). *(6 punten)*
- b Stel voor deze stroomkring de maaswet van Kirchhof op en leid af dat de lading op de condensator als functie van de tijd gegeven wordt door: $q(t) = CV(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. *(6 punten)*
- c Leid een uitdrukking af voor het E-veld in de condensator als functie van de tijd. *(5 punten)*
- d Tussen de condensatorplaten ontstaat ten gevolge van de verplaatsingsstroom een geïnduceerd magnetisch veld. Bereken, met behulp van de wet van Ampère-Maxwell, de sterkte van het geïnduceerde B-veld als functie van de tijd voor een punt tussen de condensatorplaten op een afstand a uit de middellijn van de condensator ($a \ll r$). *(6 punten)*

Begin hier op een nieuw blad

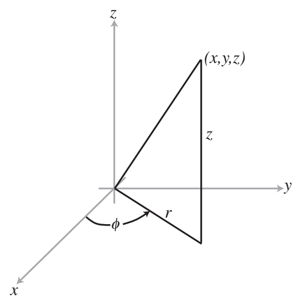
Opgave 3

Een positief geladen deeltje met lading q en massa m bevindt zich in een gecombineerd E- en B-veld. De velden staan parallel en zijn tegengesteld gericht. Het deeltje heeft een aanvangssnelheid v, loodrecht op het E- en B-veld.

- a Schets de baan die het deeltje gaat volgen. Licht, indien nodig, je tekening toe. *(5 punten)*
- b Leid een uitdrukking af voor de straal R van de baan die het deeltje doorloopt. *(5 punten)*

We maken in het vervolg van deze opgave gebruik van cilindercoördinaten (r, ϕ, z).

2



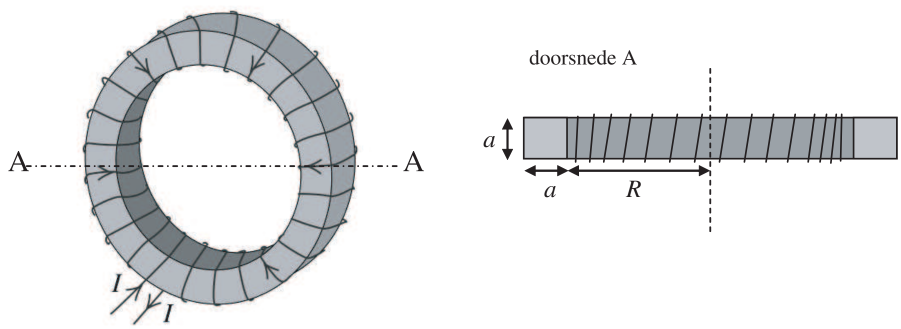
De beide velden zijn gericht langs de z-as. Het E-veld wijst in de positieve richting en het B-veld in de negatieve richting. We kiezen het assenstelsel zodanig dat het deeltje zich op $t = 0$ in het punt $(R, 0, 0)$ bevindt en dat de beginsnelheidsvector van het deeltje parallel aan de y-as in de positieve richting wijst.

c Wat wordt de omloopszin van het deeltje in dit stelsel? Geef in dit stelsel een uitdrukking voor de positie van het deeltje $[r(t), \phi(t), z(t)]$ als functie van de tijd. *(5 punten)*

Begin hier op een nieuw blad

Opgave 4

Een toroïdale spoel in vacuüm met N_1 windingen en afmetingen zoals aangegeven in de figuur, voert een stroom I.



a Bereken het B-veld in punten binnen en buiten de spoel. *(6 punten)*

b Bereken de zelfinductie L. Daarbij mag je gebruik maken van de aanname dat $a \ll R$ (maar geef wel aan waar je die aanname gebruikt). *(5 punten)*

c Men wikkelt nu om de eerste spoel een tweede wikkeling met N_2 windingen. Bereken de wederzijdse inductie M tussen beide wikkelingen. *(5 punten)*

d Men neemt nu het aantal windingen voor beide wikkelingen gelijk ($N_1 = N_2$) en schakelt beide wikkelingen parallel, zodanig dat de omloopzin van de stromen in beide wikkelingen gelijk is. Wat wordt de L_{tot} van de gecombineerde spoel? *(5 punten)*

e Dezelfde vraag als bij d), maar nu met de omloopzin van de stromen in beide wikkelingen tegengesteld. *(5 punten)*