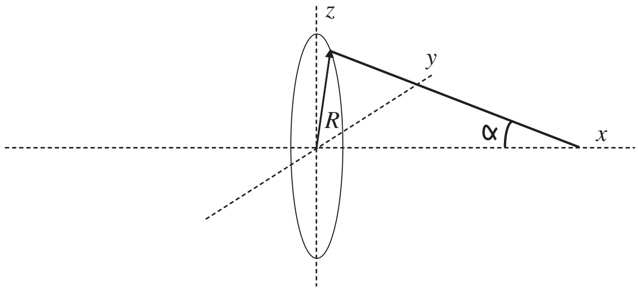
Beknopte antwoorden Tentamen ELE (NS-103b), 18 april 2007

Fouten voorbehouden

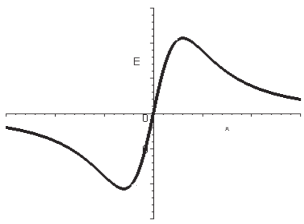
Opgave 1



a Uit cilindersymmetrie van de ladingsverdeling rond de x-as volgt dat alle componenten loodrecht op de x-as wegvallen. Voor een draadelement ds, met lading dQ, geldt: $E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{(x^2+R^2)}\cos\alpha$, met $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$. Integreren over de hele ring levert $\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{x}$ (zie Y&F, p. 815).

b $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[Q(x^2+R^2)^{-3/2} - 3Qx^2(x^2+R^2)^{-5/2}\right] = 0$, los op: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}R$

c



.

d Denk de schijf opgebouwd uit ringen met lading dQ, binnenstraal r en buitenstraal r+dr. De lading van zo'n ring wordt dan $dQ = 2\pi\sigma r dr$. Integreer de ringbijdragen over de hele schijf: $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{dQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}dr$ oplossen levert: $E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{R^2/x^2+1}}\right]$ (zie Y&F, p.817).

e $\lim_{x\ll R}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{R^2/x^2+1}}\right]$; als $x \ll R$ dan nadert de uitdrukking onder het wortelteken naar oneindig. De factor tussen vierkante haken nadert dan naar 1, waarmee de uitdrukking gelijk wordt aan $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Opgave 2

a 'Randeffecten verwaarlozen' betekent dat het veldlijnenpatroon hetzelfde is als dat van oneindig grote condensatorplaten; dan geldt translatiesymmetrie (òf: ieder vlak loodrecht op de platen is symmetrievlak). Daaruit volgt: veldcomponenten parallel aan de platen zijn gelijk aan nul. Bovendien geldt buiten de condensator dat de velden van beide platen even groot en tegengesteld zijn; het veld buiten de condensator is dus nul. Neem een Gaussdoosje half in de plaat; omsloten lading σA. Alleen flux door deksel, met richting loodrecht op dekseloppervlak: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{omsl}}}{\epsilon_0}; EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$, oftewel: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Totale lading: $Q = \sigma\pi r^2$, bijbehorende spanning: $V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d$. Dus capaciteit $C = Q/V = \frac{\epsilon_0\pi r^2}{d}$

1

- b $V_0 - iR - q/C = 0$, $i = \frac{V_0}{R} - \frac{q}{RC}$ en $i = \frac{dq}{dt}$. Los eerst homogene vergelijking op: $\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$, $q = \alpha e^{-\frac{t}{RC}}$, vervolgens een particuliere oplossing v.d. inhomogene vergelijking: $0 = \frac{V_0}{R} - \frac{q}{RC}$, oftewel: $q = V_0 C$. De som van beide levert algemene oplossing: $q(t) = CV_0 - \alpha e^{-\frac{t}{RC}}$. Leg tenslotte als beginvoorwaarde op: $q(0) = 0$, dit levert: $q(t) = CV_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$
- c $E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{Cd} = \frac{V_0}{d}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$
- d $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left[I_{\mathrm{omsl}} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right]$. Ieder vlak door de as van de condensator is een symmetrievlak van lading en stroomverdeling. Het B-veld staat daar loodrecht op; het B-veld tussen de platen loopt dus in cirkels, concentrisch met de as van de condensator. Kies als Ampèrelus een cirkel met straal a, met het vlak van de cirkel als integratieoppervlak. Op dit pad is B overal even sterk en gericht langs het pad. Voor het oppervlak geldt: $I_{\mathrm{omsl}} = 0$ en $E = \frac{V_0}{d}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. Invullen levert: $2\pi a B = \mu_0 \epsilon_0 \pi a^2 \frac{V_0}{d}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$, oftewel $B = \mu_0 \epsilon_0 a \frac{V_0}{2d}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

Opgave 3

Een positief geladen deeltje met lading q en massa m bevindt zich in een gecombineerd E- en B-veld. De velden staan parallel en zijn tegengesteld gericht. Het deeltje heeft een aanvangssnelheid v, loodrecht op het E- en B-veld.

- a Een spiraal met gelijkblijvende straal die naar boven toe steeds steiler uitgerekt is (de spoed wordt steeds groter).
- b $F_C = F_L$; $\frac{mv^2}{R} = qvB$; $R = \frac{mv}{qB}$.
- c De Lorentzkracht is naar de z-as toe gericht en de omloopszin wordt dus positief. Het deeltje draait met constante straal R rond de z as. Hoeksnelheid: $\omega = \frac{v}{R}$. Het deeltje ondervindt een constante versnelling in de z-richting: $ma = qE$. De positie op tijdstip t wordt gegeven door $(r, \phi, z(= (R, \frac{v}{R}t, \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2)$.

Opgave 4

- a Ieder vlak door de as van de spoel is een symmetrievlak. Het B-veld staat daar loodrecht op, loopt dus in cirkels concentrisch met de as van de toroïde. Kies als Ampèrepad een cirkel met straal r, parallel aan het vlak van de toroïde en concentrisch met de as. Op dit pad is B overal even sterk en gericht langs het pad. Als het pad zich binnen het spoellichaam bevindt geldt: $I_{\mathrm{omsl}} = N_1 I$. Invullen in Ampère levert: $B_{\mathrm{binnen}} = \frac{\mu_0 N_1 I}{2\pi r}$. Buiten het spoellichaam geldt $I_{\mathrm{omsl}} = 0$, en dus $B_{\mathrm{buiten}} = 0$.
- b $L = \frac{N_1 \Phi_B}{I}$. Omdat $a \ll R$ is de sterkte van het B-veld in goede benadering uniform, dus geldt: $\Phi_B = a^2 B$, dus $L = \frac{\mu_0 N_1^2 a^2}{2\pi R}$
- c De tweede winding omvat de volledige flux van de eerste, dus: $M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_{B1}}{I_1}$. $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2\pi R}$.
- d $L_{tot} = \frac{1}{L_1 + M} + \frac{1}{L_2 + M}$. $L_1 = L_2 = M$. Dit levert $L_{\mathrm{tot}} = L$.
- e Het somveld van beide spoelen is nul, er is dus geen geïnduceerde EMK, dus $L_{\mathrm{tot}} = 0$

2