Hertentamen ELE (NS-103b), 30 juni 2008

- *Bij dit tentamen is het gebruik van rekenmachine, boek of formuleblad niet toegestaan*
- *Geef, overal waar dat van toepassing is, aan hoe je gebruik maakt van symmetrie om de richting van het veld te bepalen, op grond van welke overwegingen je integratiepaden en oppervlakken kiest, en waardoor toegepaste vereenvoudigingen (integralen, vectorproducten, reeksontwikkelingen etc.) gerechtvaardigd zijn.*
- *Het nakijkwerk wordt verdeeld over meerdere correctoren. Begin daarom iedere opgave op een nieuw blad.*
- *In totaal kun je voor de opgaven in dit tentamen maximaal 90 punten scoren. Je tentamencijfer* $= 1 + \frac{\textit{behaald aantal punten}}{10}$.
- *Je eindcijfer voor het vak is het gewogen gemiddelde van je cijfer voor dit tentamen (90%) en dat voor de inleveropgaven (10%)*

SUCCES!

Opgave 1

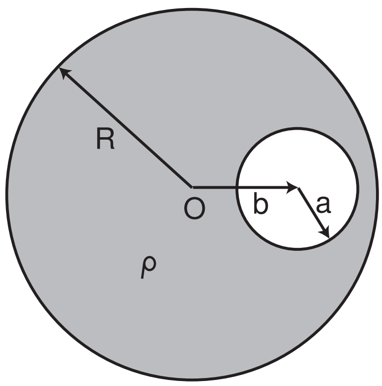
Een zeer lange cilinder met straal R draagt een uniform verdeelde ruimtelading met dichtheid ρ. De cilinder is gericht langs de z-as.

a Geef de dimensie van ρ *(3 punten)*.

b Geef, zonder rekenwerk, maar beargumenteerd, het veld op de as van de cilinder *(3 punten)*.

c Bereken met behulp van de formule van Gauss het veld binnen en buiten de cilinder. Noteer uw antwoord in vectorvorm *(8 punten)*.

Nu wordt in de lengterichting van de cilinder een gat geboord met straal a op een afstand b van de as. In deze holte bevindt zich geen lading. Je kunt de nieuwe situatie beschouwen als een superpositie van de oorspronkelijke cilinder met ladingsdichtheid ρ en een tweede cilinder met ladingsdichtheid $-\rho$.



1

d Leid voor de nieuwe situatie een uitdrukking af voor de E-veldvector in een punt $\vec{r}$ buiten de grote cilinder *(8 punten)*.

e Geef een uitdrukking voor de E-veldvector binnen de holte en toon aan dat het veld binnen de holte uniform is *(10 punten)*.

Opgave 2

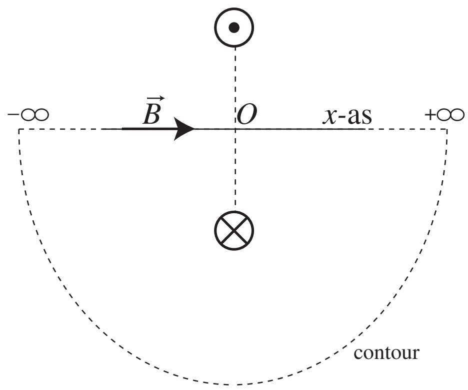
Een stroomcirkel in vacuüm, met middelpunt O en straal R voert een stroom I. De x-as gaat door O (gekozen als oorsprong) en staat loodrecht op het vlak van de stroomcirkel. De omloopszin van de stroom is zodanig dat de opgewekte magnetische inductie $\vec{B}$ op de x-as in de $\hat{x}$ richting wijst. We bekijken alleen punten van de x-as en maken gebruik van de afkorting

$$\frac{\mu_0 I}{2R} \equiv B_0$$

a Laat met behulp van de wet van Biot-Savart ($d\vec{B} = \mu_0 \frac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{4\pi r^2}$) zien dat de grootte van het veld op de x-as gegeven wordt door

$$B(x) = \text{constante}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

en bepaal de constante *(10 punten)*.



b Bereken de integraal

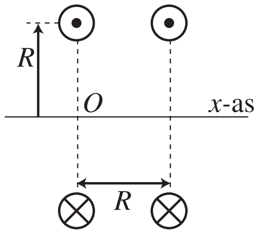
$$\lim_{a\to\infty}\int_{x=-a}^{x=a} B(x)dx$$

en wel op de volgende twee manieren *(10 punten)*:

1 Door rechtstreekse integratie, met als gegeven dat $t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ de primitieve is van $(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}$.

2 Via de wet van Ampère, met als contour de gehele x-as, gesloten via een grote boog in het oneindige zoals in de figuur.

Op een afstand R van de bovenstaande stroomcirkel wordt nu een tweede identieke stroomcirkel geplaatst, zódanig dat de x-as de symmetrie-as van beide is. Verder maken we gebruik van de afkorting $\frac{x}{R} \equiv \alpha$ en beschouwen we alleen het veld op de x-as tussen beide stroomcirkels, dus $0 \leq \alpha \leq 1$.



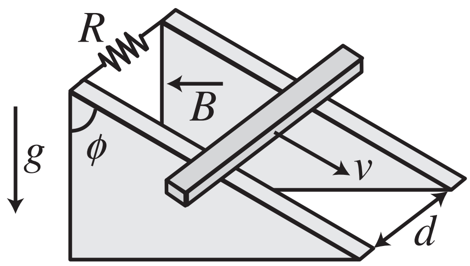
c Laat zien dat op de x-as het veld tussen beide stroomcirkels gegeven wordt door *(6 punten)*

$$B(\alpha) = B_0 \left(\left(1 + \alpha^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(2 + \alpha^2 - 2\alpha\right)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

d Het veld tussen de stroomcirkels is in het midden ($\alpha = \frac{1}{2}$) maximaal en rondom het midden in hoge mate homogeen.
Laat zien dat voor $\alpha = \frac{1}{2}$ de eerste afgeleide $\frac{dB}{d\alpha}$ inderdaad nul is. *(6 punten)*

Opgave 3

Een geleidende staaf met massa m glijdt onder invloed van de zwaartekracht zonder wrijving naar beneden langs twee geleidende wiggen, zoals aangegeven in de figuur. Staaf en wiggen zijn weerstandsloos. De afstand tussen de wiggen bedraagt d en het bovenoppervlak van de wiggen, waarover de staaf glijdt, maakt een hoek ϕ met de verticaal. Bovenaan zijn de wiggen onderling verbonden via een weerstand R. Het geheel bevindt zich in een homogeen magneetveld $\vec{B}$ dat *horizontaal* naar links wijst (zie figuur). Wanneer de staaf vanuit rust wordt losgelaten dan bereikt deze na verloop van tijd een constante snelheid v_{eind}. De helling is daartoe voldoende lang.



a Hoe groot is v_{eind}, uitgedrukt in m, g, B, d, R en ϕ? Ga na dat de verticale component van v_{eind} onafhankelijk is van hoek ϕ *(16 punten)*.

b Laat zien dat in de eindsituatie het vermogen geleverd door de zwaartekracht en het vermogen ontwikkeld in weerstand R even groot zijn. *(10 punten)*

- EINDE -