Uitwerkingen Hertentamen ELE (NS-103b), 30 juni 2008

(fouten voorbehouden)

Opgave 1

a Cm^{-3}

b Ieder vlak dat opgespannen wordt door de cilinder-as is een symmetrievlak van de ladingsverdeling. Het veld loodrecht daarop is dus nul. Omdat dit voor ieder vlak geldt is de radiële component op de cilinder-as nul. Omdat de cilinder zeer lang is, mag ook ieder vlak loodrecht op de cilinder-as als symmetrievlak beschouwd worden. Ook voor zulke vlakken geldt dus dat de loodrechte component nul is. Het veld op de as is dus overal nul.

c Je wilt het veld weten in $\vec{r}$ op afstand r van de cilinder-as. Het vlak opgespannen door de as van de cilinder en de vector $\vec{r}$ is een symmetrievlak van de ladingsverdeling en het vlak door $\vec{r}$ loodrecht op de cilinder-as is ook een symmetrievlak, zodat er alleen een radieel gerichte veldcomponent overblijft. Uit rotatie en translatiesymmetrie volgt dat het veld voor alle punten op gelijke afstand r uit de cilinder-as even sterk is. Kies daarom een cilindervormig Gauss-doosje, concentrisch met de cilinder-as met straal r en lengte ℓ. Er geldt $\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{omsl}$. Het veld staat evenwijdig aan de 'deksels', dus de flux door de deksels is nul. Het veld ter plaatse van de 'wand' staat loodrecht op die wand en is overal op de wand even sterk. De flux wordt dus $\Phi = EA$ met $A = 2\pi r\ell$. Beschouw nu eerst het geval $r \leq R$. De omsloten lading is dan $Q_{omsl} = V\rho = \pi r^2 \ell\rho$. Het veld wordt dus $E2\pi r\ell = \frac{\pi r^2 \ell \rho}{\epsilon_0}$, oftewel: $\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{2\epsilon_0}$. Voor $r \geq R$ geldt dat $Q_{omsl} = \pi R^2 \ell \rho$, zodat $E2\pi r\ell = \frac{\pi R^2 \ell \rho}{\epsilon_0}$, en dus $\vec{E} = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}\hat{r}$.

d Het veld in een punt $\vec{r}$ buiten de grote cilinder is het somveld van de oorspronkelijke cilinder met een tweede cilinder parallel daaraan met straal b, ladingsdichtheid $-\rho$ en een cilinder-as door $\vec{a}$. De vector van de as van deze tweede cilinder naar het punt r wordt gegeven door $\vec{r} - \vec{a}$, en de veldbijdrage van deze cilinder is gericht langs deze vector. Het somveld in punt $\vec{r}$, met $r > R$ bedraagt $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{b^2 \rho}{2\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{a}|}\widehat{r - a}$.

e Het veld binnen de holte is ook het somveld van de bijdragen van beide cilinders, alleen gebruik je nu voor beide cilinders het veld binnen de cilinder: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}\rho}{2\epsilon_0} - \frac{(\vec{r}-\vec{a})\rho}{2\epsilon_0} = \frac{\vec{a}\rho}{2\epsilon_0}$. Het veld binnen de holte is dus uniform.

Opgave 2

a Ieder vlak dat opgespannen wordt door de x-as is een antisymmetrievlak van de stroomverdeling. De veldcomponent loodrecht daarop is nul, zodat er alleen een veldcomponent gericht langs de x-as overblijft. De grootte van de x-component volgt door de veldbijdragen in de x-richting over de hele ring te integreren. De veldbijdrage van een stroomelementje $Id\ell$ in de x-richting is: $dB_x = dB\cos\phi = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi x^2 + R^2}\frac{R}{(x^2+R^2)^{1/2}}$. De integraal wordt dus: $B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R d\ell}{(x^2+R^2)^{3/2}}$. Alles in deze integraal is constant over het integratiepad, behalve $d\ell$. De integraal kan dus herschreven worden als: $B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int d\ell$. De uitkomst van de laatste integraal levert de omtrek van de stroomcirkel, zodat $B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$. Herschrijf: $B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{R^2}{R^2}\right)^{-3/2}$ De gezochte constante is dus gelijk aan B_0

b De eerste aanpak:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{x=-a}^{x=a} B_x(x)dx = B_0 \lim_{a\to\infty}\int_{x=-a}^{x=a}\left(\frac{x^2}{R^2}+1\right)^{-3/2} dx$$

1

Substitueer: $t = x/R$:

$$B_0 \lim_{a\to\infty} \int_{t=-aR}^{t=aR} \left(t^2+1\right)^{-3/2} R dt = B_0 \lim_{a\to\infty} \left[\frac{x}{R} \left(\frac{x^2}{R^2} + 1 \right)^{-1/2} R \right]_{-aR}^{aR} = 2B_0 R = \mu_0 I$$

De tweede aanpak: De omvatte stroom door de aangegeven Ampèrelus bedraagt I. Het integratiepad bestaat uit de x-as en een grote boog via oneindig zoals aangegeven in de figuur. We moeten nu de bijdrage van de boog bepalen: de stroomring is een magnetische dipool; op grote afstand valt het veld dus af met r^{-3}. De lengte van de grote boog in het Ampère-pad uit de figuur is evenredig met r^2, dus als de boog op zeer grote afstand gelegd wordt, nadert de pad-integraal naar nul ($\frac{r^2}{r^3}$). De volledige padintegraal wordt dus bepaald door de bijdrage van het pad over de x-as, waar het veld parallel staat aan het pad: $\int B d\ell = \mu_0 I$, dus

$$\lim_{a\to\infty} \int_{x=-a}^{x=a} B_x(x) dx = \mu_0 I$$

c Het veld van de eerste stroomcirkel bedraagt $B_1 = B_0 \left(\frac{x^2}{R^2}+1\right)^{-3/2}$. De afstand van een punt op de x-as tot het middelpunt van de tweede stroomcirkel wordt gegeven door $x - R$. De veldbijdrage tgv. de tweede stroomcirkel wordt dus: $B_2 = B_0 \left(\frac{(x-R)^2}{R^2}+1\right)^{-3/2}$. Optellen en invullen levert:

$$B = B_0 \left[\left(\frac{x^2}{R^2} + 1 \right)^{-3/2} + \left(\frac{(x-R)^2}{R^2} + 1 \right)^{-3/2} \right] = B_0 \left[\left(1+\alpha^2\right)^{-3/2} + \left(2+\alpha^2-2\alpha\right)^{-3/2} \right]$$

d

$$\frac{dB}{d\alpha} = B_0 \left[-3\alpha \left(1+\alpha^2\right)^{-5/2} - 3(\alpha-1)\left(2+\alpha^2-2\alpha\right)^{-5/2} \right]$$

Invullen $\alpha = \frac{1}{2}$ levert $B = 0$.

Opgave 3

a De vrije ladingsdragers in de staaf ondervinden een lorentzkracht $\vec{F}_L = \vec{v} \times \vec{B} = vB\cos\phi$, die gericht is langs de lengterichting van de staaf. De lorentzkracht werkt over de gehele lengte van de staaf, en dit levert een EMK: $\mathcal{E} = F_L d$. Daardoor gaat er een stroom lopen met grootte $I = \mathcal{E}/R = vB\cos\phi d/R$. Deze stroom staat loodrecht op het magneetveld. Daardoor werkt op de draad een loodrecht omhooggerichte lorentzkracht met grootte $F_L = IdB = vB^2\cos\phi d^2/R$. De zwaartekracht op de staaf bedraagt $F_z = mg$. In de eindsituatie is de nettokracht op de stroomdraad nul $|F_L| = |F_z|$. Invullen levert: $vB^2\cos\phi d^2/R = mg$ oftewel: $= v_{\text{eind}}\cos\phi = \frac{mgR}{B^2d^2} = v_{\text{y,eind}}$.

b Het vermogen geleverd door de zwaartekracht bedraagt $P = \vec{F}_z \cdot \vec{v} = mgv_{\text{eind}}\cos\phi$. Het vermogen dat in de weerstand omgezet wordt bedraagt $P = VI = I^2R = \left[v_{\text{eind}}B\cos\phi d/R\right]^2 R = mgv_{\text{eind}}\cos\phi$.

2