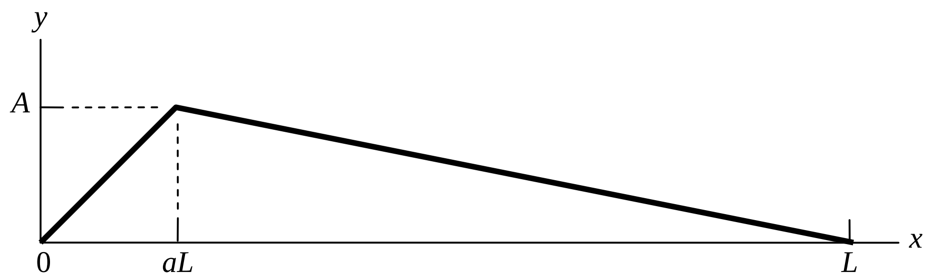
TENTAMEN Golven en Optica
Augustus 2007

**Opgave 1. Trillende snaar (35 punten).**
Een ideale snaar met massa per lengte-eenheid $\mu$ is opgespannen tussen de punten $x$=0 en $x$=$L$. De voortplantingssnelheid van golven op de snaar is $v$. We trekken aan een punt van de snaar op $x=a\,L$ ($0<a<1$) en geven deze een transversale uitwijking $A$, zodat op $t$=0 de vorm $y(x,t=0)$ van de snaar gegeven is als in de figuur hieronder.




a) Geef de uitdrukking voor de spankracht $F$ in de snaar. Het effect van de vervorming van de snaar op de spankracht mag u verwaarlozen.
b) Voor elk segment $\Delta x$ van de snaar wordt de uitgerekte lengte bij benadering gegeven door $\Delta x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]$. Laat dit zien. Veronderstel hierbij dat $A \ll L$.
c) Laat vervolgens zien dat de potentiële energie *per lengte-eenheid* van de snaar $u_p(x,t)$ gegeven wordt door

$$u_p(x,t)=\frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2$$

d) De *totale* potentiële energie in de snaar $E_p$ op $t$=0 wordt gegeven door

$$E_p=\frac{FA^2}{2L}\frac{1}{a(1-a)}$$. Laat dit zien.

[Hint: Vind uitdrukkingen voor $y(x,0)$ op de twee segmenten (0, $a\,L$) en ($a\,L$, $L$) van de snaar en gebruik deze.]
e) Geef een schets van $E_p$ als functie van $a$ ($0<a<1$) en verklaar deze kort.

We beschouwen nu de situatie voor $a$=1/2, m.a.w. de snaar wordt precies in het midden uitgetrokken. Op $t$=0 laten we de snaar los, zodat deze gaat oscilleren.
f) Na zekere tijd $t_1$ is de snaar precies recht: $y(x,t_1)=0$. Hoe groot is dan de kinetische energie $E_k$ (in Joule) in de snaar? Gegeven is dat $v$=300 m/s, $\mu$=3 g/m, $A$=1 cm, $L$=60 cm.
g) Na welke tijd $T$ (in seconden) heeft de snaar weer dezelfde vorm als op $t$=0, $y(x,T)=y(x,0)$?
h) (*bonus 5 punten*). Schets in één figuur de vorm van de snaar op $t$=0, $\frac{1}{8}T$ , $\frac{1}{4}T$ , $\frac{3}{8}T$ , $\frac{1}{2}T$ , $\frac{5}{8}T$ , $\frac{3}{4}T$ , $\frac{7}{8}T$ .

**Opgave 2. Breking (20 punten)**

We beschouwen de overgang tussen twee oneindig dikke media met brekingsindices $n_1$ en $n_2$ ($n_2$>$n_1$). Een circulair gepolariseerde lichtbundel met golfgetal $k$ valt vanuit medium 1 met index $n_1$ in op dit grensvlak onder een hoek $\theta_i$ met de normaal op het grensvlak. De hoek van de doorgaande bundel met de normaal noemen we $\theta_t$.

a) Welke waarde heeft de golflengte van dit licht na breking aan het grensvlak? Welke *frequentie* heeft het licht na breking?

We laten het licht nu invallen onder de Brewsterhoek $\theta_p$ ($\theta_t$=$\theta_p$)

b) Geef in een figuur de polarisatie van het gereflecteerde licht aan.
c) Wat kunt u zeggen over de polarisatietoestand van de gebroken lichtbundel?
d) De Brewsterhoek voor licht dat vanuit medium 2 op het grensvlak valt noemen we $\theta_{p'}$. Laat zien, door gebruik te maken van Brewster's wet, dat de twee Brewsterhoeken $\theta_p$ en $\theta_{p'}$ complementair zijn, d.w.z. $\theta_p + \theta_{p''} = 90^0$.

**Opgave 3. Polarisatie (20 punten)**

Voor twee elektromagnetische golven worden de elektrische veldvectoren gegeven door

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_0 \cos(kz + \omega t) - \vec{e}_y E_0 \cos(kz + \omega t + \pi/2)$$

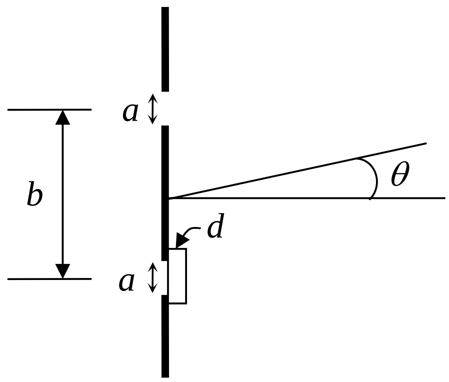
$$\vec{E}_2 = 3\vec{e}_x E_0 \sin(kz + \omega t) + 2\vec{e}_y E_0 \cos(kz + \omega t)$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y$ zijn eenheidsvectoren in de $x$-richting, resp. de $y$-richting.

a) In welke richting lopen deze golven, en met welke fasesnelheid?
b) Geef aan welke polarisatietoestand deze velden hebben en licht het antwoord toe met een $E_x - E_y$-diagram voor $z$=0, kijkend in de richting waarin de golf naar de waarnemer toekomt.
c) We definiëren een derde golf $\vec{E}_3 = \vec{E}_a \cos(kz + \omega t) + \vec{E}_b \sin(kz + \omega t)$ zodanig dat de superpositie van $\vec{E}_3$ en $\vec{E}_2$ gelijk is aan de golf $\vec{E}_1$, oftewel $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \vec{E}_3$. Geef $\vec{E}_a$ en $\vec{E}_b$ in termen van $E_0$, $\vec{e}_x$, en $\vec{e}_y$.
d) Geef de polarisatietoestand van $\vec{E}_3$ en licht dit toe met een $E_x - E_y$-diagram.

**Opgave 4. Diffractie van twee spleten (25 punten)**

Een vlakke elektromagnetische golf met golflengte $\lambda_0$ in lucht valt loodrecht op twee lange, dunne spleten, met breedte $a$ en onderlinge afstand $b$. Eén van de spleten (de onderste; zie bijgaande tekening) is bedekt met een dun, doorzichtig plaatje met een dikte $d$ en brekingsindex $n$. De dikte $d$ is zo gekozen dat $(n-1)d/\lambda_0 = 5/2$. Het interferentiepatroon wordt waargenomen op een scherm dat op een afstand $L$ staat, waarbij $L$ groot is t.o.v. de spleetafstand. We beschouwen het patroon als functie van de hoek $\theta$.




We bekijken eerst het alleen het effect van *interferentie* van beide spleten, m.a.w. we veronderstellen $a \ll b$. Beschouw een imaginair “plaatje lucht” ($n_{\text{lucht}}$=1) achter de bovenste spleet met dezelfde dikte $d$ als het diëlektrische plaatje. Golven die het “plaatje lucht” verlaten, hebben dus een fase doorlopen van $2\pi d/\lambda_0$.

a) Laat zien dat het faseverschil tussen golven die de beide plaatjes hebben doorlopen gelijk is aan $5\pi$.
b) Geef de conditie voor de hoeken $\theta_m$ waarbij constructieve interferentie optreedt, in termen van $d$, $L$ en/of $\lambda$.
c) Schets het interferentiepatroon op het scherm als functie van $\theta$.

We nemen nu de effecten van zowel interferentie als diffractie van de spleten mee. Er geldt $b/a$=10.

d) Schets het resulterende intensiteitpatroon op het scherm. Geef hierin duidelijk de effecten van de interferentie van de beide spleten en van diffractie van de spleten aan. Een berekening wordt niet verlangd. Tevens mag u aannemen dat alle hoeken $\theta$ zo klein zijn, dat $\cos(\theta)\approx 1$, en dus dat de optische padlengte door het diëlektrische plaatje onafhankelijk is van $\theta$.