

# Uitwerking Tentamen Golven en Optica

maandag 27 augustus 2007

---

## Opgave 1

### ■ 1a

$$F = \mu v^2$$

### ■ 1b

De helling  $\partial y(x,t) / \partial x$  in punt  $x$  noemen we even  $h$ . De lengte van een stukje snaar tussen  $x-1/2\Delta x$  en  $x+1/2\Delta x$  is volgens Pythagoras  $\left(\sqrt{\Delta x^2 + h^2 \Delta x^2}\right) \approx \Delta x \left(1 + 1/2 h^2\right)$ . Vul vervolgens in dat  $h = \partial y(x,t) / \partial x$  en het antwoord volgt.

### ■ 1c

De potentiële energie van een touw dat wordt uitgerekt van lengte  $L$  tot  $L+\Delta L$  door een spankracht  $F$  is per definitie gelijk aan  $F \cdot \Delta L$ .

Beschouw nu een klein stukje snaar met lengte  $\Delta x$ , rondom punt  $x$ . Dit stukje snaar met lengte  $\Delta x$  wordt uitgerekt met een hoeveelheid  $\Delta x \cdot 1/2 \cdot h^2$ , de potentiële energie van dat stukje snaar is dus  $\frac{1}{2} F h^2 \Delta x$ . Per lengte-eenheid is de potentiële energie dus  $\frac{F h^2}{2}$ . Vul vervolgens in dat  $h = \partial y(x,t) / \partial x$  en het antwoord volgt.

### ■ 1d

Voor  $x < aL$  geldt  $y(x, 0) = \frac{Ax}{aL}$ , dus de helling  $h$  is daar  $\frac{A}{aL}$ .

Voor  $x \geq aL$  geldt  $y(x, 0) = A \left(1 - \frac{x-aL}{L-aL}\right)$ , dus de helling  $h$  is daar  $-\frac{A}{L-aL}$ .

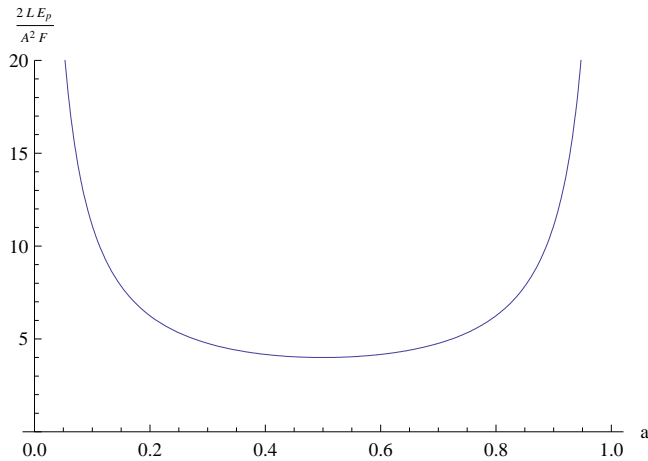
Integreren van 0 tot  $aL$  geeft voor de potentiële energie van het linkerstuk:  $aL \cdot \frac{1}{2} F \cdot \left(\frac{A}{aL}\right)^2 = \frac{FA^2}{2aL}$

Integreren van  $aL$  tot  $L$  geeft voor de potentiële energie van het rechterstuk:  $(L-aL) \cdot \frac{1}{2} F \cdot \left(\frac{-A}{L-aL}\right)^2 = \frac{FA^2}{2(L-aL)}$ .

Beide delen optellen om te totale potentiële energie te vinden levert  $E_p = \frac{FA^2}{2L} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a}\right)$  en na alles onder één noemer brengen volgt het gevraagde antwoord.

### ■ 1e

Als  $a$  gelijk is aan  $1/2$  dan is de potentiële energie minimaal, in dat geval is de uitrekking van de snaar minimaal. Als  $a$  naar 0 of naar 1 gaat, dan wordt de potentiële energie volgens de uitdrukking uit **1d** oneindig groot. Je hoeft hier niet te beargumen-teren waarom de potentiële energie naar oneindig gaat.



### ■ 1e (verdieping)

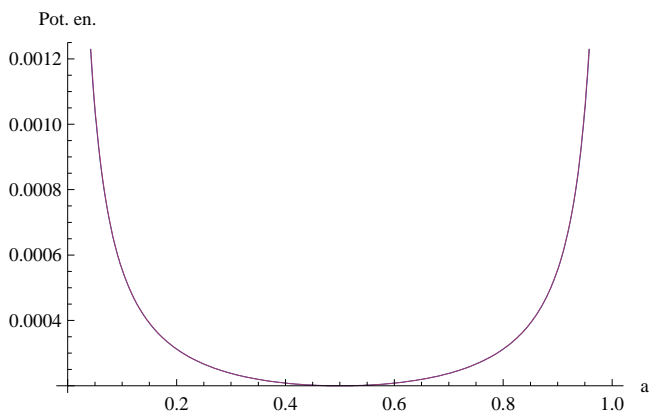
In werkelijkheid MAG de uitdrukking uit **1d** niet gebruikt worden in de limiet dat  $a$  naar 0 gaat (of naar 1) omdat  $\partial y/\partial x$  dan naar  $\infty$  gaat en in 1b is juist gebruikt dat  $\partial y/\partial x$  klein is! Als  $a$  gelijk is aan 0 gaat dan rekt de snaar uit van zijn oorspronkelijke lengte  $L$  tot lengte  $A + \sqrt{L^2 + A^2} \approx A + L$  indien  $A \ll L$ ; de potentiële energie is dan dus  $F \cdot A$  en helemaal niet gelijk aan oneindig! Bijgaande berekening laat zien wat er gebeurt in een numeriek voorbeeld.

```
F = 1;
L = 1;
A = 0.01;
```

```
peExact[x_] := F (sqrt[A^2 + (a L)^2] + sqrt[A^2 + (1 - a L)^2] - L);
```

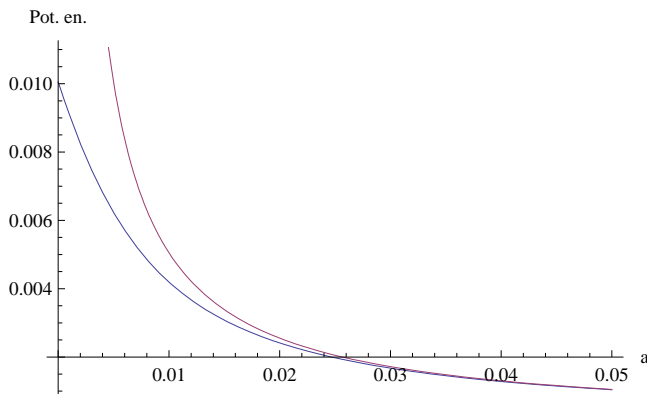
```
peTentamen[x_] := (F A^2) / (2 L a (1 - a))
```

```
Plot[{peExact[x], peTentamen[x]}, {a, 0, 1}, AxesLabel -> {"a", "Pot. en."}]
```



Het lijkt alsof de resultaten gelijk zijn, maar als je nauwkeuriger gaat kijken in de buurt van  $a=0$  zijn de verschillen overduidelijk.

```
Plot[{peExact[x], peTentamen[x]}, {a, 0, 0.05}, AxesLabel -> {"a", "Pot. en."}]
```



### ■ 1e (hoe de tekening is gemaakt)

```
Plot[1/a + 1/(1-a), {a, 0, 1}, PlotRange -> {0, 20}, AxesLabel -> {"a", " $\frac{2 L E_p}{A^2 F}$ "}]
```

### ■ 1f

Als de snaar precies recht is, dan is de potentiële energie per definitie gelijk aan 0. Dus alle energie is dan kinetische. We hoeven dus alleen de totale energie op  $t=0$  te berekenen. Met  $a=1/2$  is dat dus  $\frac{2 F A^2}{L}$ . Uit antwoord 1a volgt dat dit  $F = \mu v^2$ . Met  $v = 300$  m/s en  $\mu = 3 \cdot 10^{-3}$  kg/m, volgt  $F = 270$  N. Dus de kinetische energie is  $2 \cdot 270 \cdot 10^{-4} / 0.6 = 0.09$  J.

Check of de eenheden kloppen van  $\mu v^2 A^2 / L$ . Dat zijn: kg/m \* m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> \* m<sup>2</sup> / m ofwel kg\*m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> ofwel J.

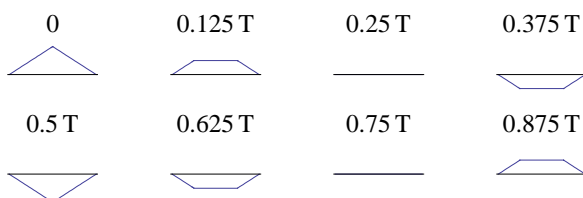
Antwoord : **0.09 J**

### ■ 1g

Die tijd is  $\frac{2L}{v}$  (de tijd die het duurt voordat de snaar weer terug is). Dus  $T = 2 \cdot 0.6$  m / (300 m/s) ofwel 4 ms. De fundamentele frequentie is dus 250 Hz.

Antwoord: **T=4 ms**

### ■ 1h

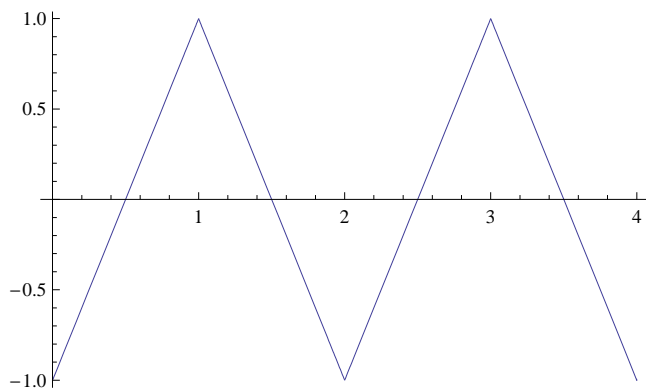


### ■ 1h (verdieping)

De totale staande golf wordt samengesteld uit een naar links lopende zaagtand en een naar rechtslopende zaagtand. Het vinden van de geschikte wiskundige vorm voor zo'n zaagtand is niet eenvoudig, maar het is ook niet essentieel voor de opdracht. Je kunt hem heel makkelijk tekenen zonder dat je zo'n wiskundig voorschrift hebt.

$$\text{zaagtand}[x_] := \begin{cases} -1 + 2 \text{Mod}[x, 1] & 0 \leq \text{Mod}[x, 2] < 1 \\ 1 - 2 \text{Mod}[x, 1] & 1 \leq \text{Mod}[x, 2] < 2 \end{cases}$$

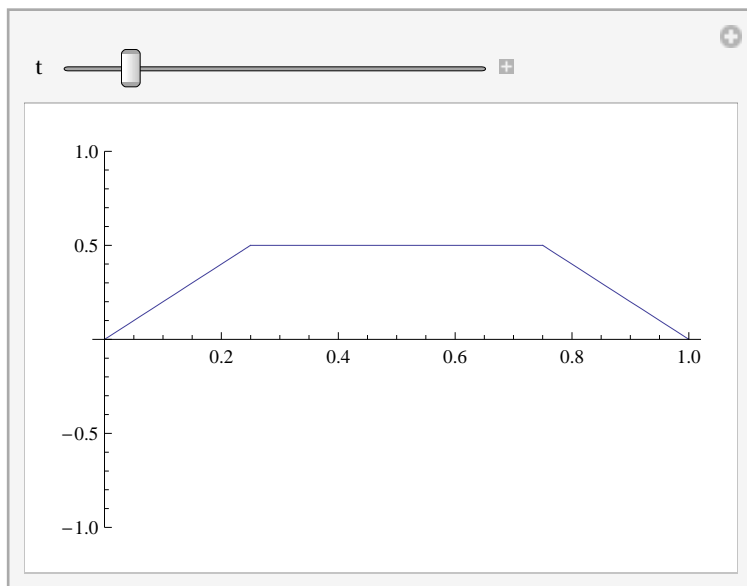
```
Plot[zaagtand[x], {x, 0, 4}]
```



Met deze definitie bevindt de opgespannen snaar zich bijv. tussen  $x = 1/2$  en  $x = 3/2$ . Omdat  $L$  en  $v$  gelijk zijn aan 1, is de periode  $T$  gelijk aan 2.

Bekijk het tijdverloop, door de naar links en de naar rechts lopende golven bij elkaar op te tellen.

```
Manipulate[
  Plot[ $\frac{1}{2}$  (zaagtand[ $x + \frac{1}{2} - t$ ] + zaagtand[ $x + \frac{1}{2} + t$ ]),
    {x, 0, 1},
    PlotRange -> {-1, 1}],
  {t, 0, 2}]
```



Als je twee zaagtanden t.o.v. elkaar verschuift en optelt krijg je een plateau dat steeds groter wordt totdat de hele snaar plat is. Dat gebeurt na  $1/4$  van de periode (op  $t=1/2$ ). Daarna is het verloop eenvoudig. De uitwijking wordt negatief, tot na een halve periode ( $t=1$ ) de snaar weer de maximale uitwijking heeft, maar dan negatief.

- 1h (hoe de tekening is gemaakt)

```
GraphicsArray[Table[Plot[ $\frac{1}{2}$  (zaagtand[x +  $\frac{1}{2}$  - t] + zaagtand[x +  $\frac{1}{2}$  + t]),
  {x, 0, 1},
  PlotRange -> {-1, 1}, Ticks -> None, Axes -> {True, False}, PlotLabel -> t / 2. "T",
  {t, 0, 2 - 1 / 4, 1 / 4}] ~Partition~ 4]
```

## Opgave 2

- 2a

Uit  $v = \omega/k$  en  $v = c/n$  volgt alles.

Golflengte in medium 2:  $\lambda_2 = \frac{2\pi n_2}{k n_1}$ . Frequentie in medium 2 is natuurlijk hetzelfde als in medium 1:  $\omega = \frac{c k}{n_1}$

- 2b

De volgende elementen moeten in de tekening zichtbaar zijn: Het gereflecteerde licht is lineair gepolariseerd. De polarisatie richting is loodrecht op de voortplantingsrichting, maar ook evenwijdig aan het scheidingsvlak tussen medium 1 en medium 2.

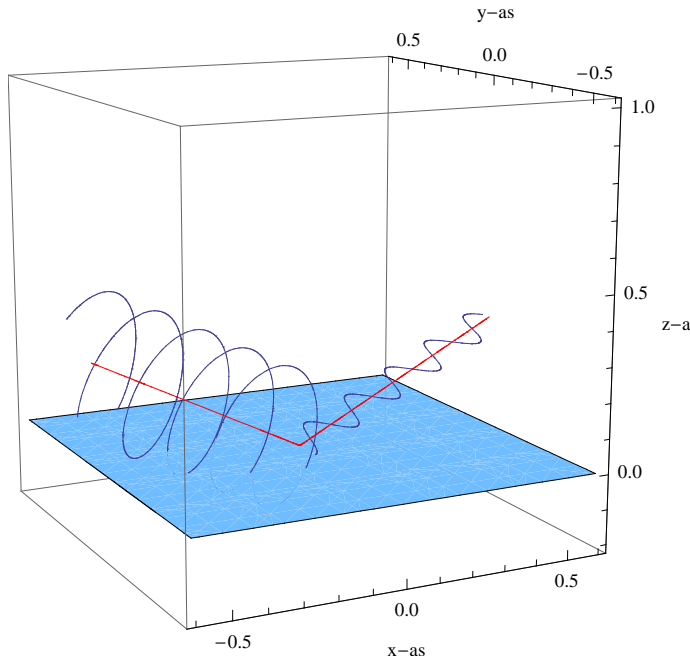
- 2d (verdieping)

Veroverstel dit het licht zich voortplant evenwijdig aan het  $xz$ -vlak en dat het gereflecteerd wordt aan het vlak  $z=0$  en dat de Brewsterhoek  $60^\circ$  is. De voortplantingsrichting na reflectie is  $\{2,0,1\}$ ; voor reflectie was het  $\{2,0,-1\}$ . Na reflectie is het licht lineair gepolariseerd in de  $y$ -richting. N.B. De amplitude in de  $y$ -richting is na reflectie niet hetzelfde als voor reflectie, omdat er ook licht dat in de  $y$ -richting is gepolariseerd wordt doorgelaten. In dit geval wordt de amplitude van het elektrische veld in de  $y$ -richting na reflectie gehalveerd.

```

fig1 = ParametricPlot3D[t {2, 0, -1} + {
   $\frac{0.2 \sin[30 \pi t]}{\sqrt{5}}$ , +0.2 Cos[30  $\pi$  t], 2  $\frac{0.2 \sin[30 \pi t]}{\sqrt{5}}$ 
},
  {t, -1, 0}, AxesLabel -> {"x-as", "y-as", "z-as"}];
fig2 = ParametricPlot3D[t {2, 0, 1} + {0, -0.1 Cos[30  $\pi$  t], 0}, {t, 0, 1};
fig3 = ParametricPlot3D[{2 t, 0, Abs[t]}, {t, -1, 1}, PlotStyle -> Red];
fig4 = Plot3D[0, {x, -0.6, 0.6}, {y, -0.6, 0.6}, Mesh -> None];
Show[fig1, fig2, fig3, fig4,
  PlotRange -> {{-0.6, 0.6}, {-0.6, 0.6}, {-0.2, 1}}, ViewPoint -> {-2, -4, 1}]

```



In bovenstaande figuur is de elektrische veld voor een punt op de rode lijn (voor invallende en gereflecteerde golf) evenredig aan de afstand tot blauwe curve.

### ■ 2c

De gebroken lichtbundel is elliptisch gepolariseerd.

### ■ 2d

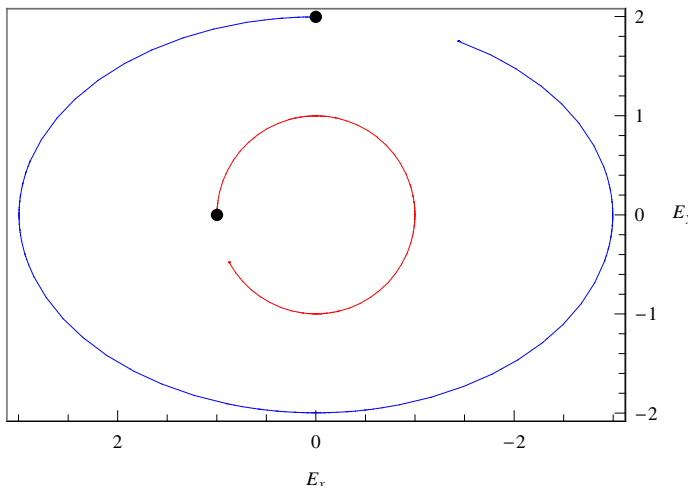
Volgens Brewster's wet geldt dat  $\tan(\theta_p) = n_2 / n_1$ . Dus dan geldt  $\sin(\theta_p) / \cos(\theta_p) = n_2 / n_1$ . Als we licht vanuit medium 2 laten invallen geldt dus dat  $\tan(\theta_{p'}) = n_1 / n_2$  en dus dat  $\sin(\theta_{p'}) / \cos(\theta_{p'}) = n_1 / n_2$ . Nu weten we ook dat  $\sin(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$  en dat  $\cos(\alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$ .

Dus  $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\theta_p)}{\cos(\theta_p)} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta_{p'})}{\cos(\pi/2 - \theta_{p'})}$ . Hieruit volgt direct dat  $\theta_p = \frac{\pi}{2} - \theta_{p'}$ , ofwel  $\theta_p + \theta_{p'} = 90^\circ$ . Met andere woorden  $\theta_p$  en  $\theta_{p'}$  zijn complementair. N.B.:  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ .

## Opgave 3

### ■ 3a

De golven lopen in de negatieve z-richting. De fasesnelheid is  $\omega/k$ .

**3b**

Kijkend vanaf de negatieve  $z$ -as (naar de oorsprong toe) zie je dat golf 1, de rode curve, een (rechtsomdraaiende) circulaire gepolariseerde golf is. Golf 2, de blauwe curve, is een (linksomdraaiende) elliptisch gepolariseerde golf. De beginpunten zijn aangegeven met de zwarte stip.

De geven van de juiste, de verkeerde of geen draairichting wordt niet beoordeeld!

- **3b (hoe de tekening is gemaakt)**

$z = 0; k = 1; \omega = 1;$

Show[

```
Graphics3D[{PointSize[0.02], Point[{1, 0, 0}]}],
ParametricPlot3D[{Cos[k z + \omega t], -Cos[k z + \omega t + \pi/2], 0}, {t, 0, 2 \pi - 0.5}, PlotStyle -> Red],
Graphics3D[{PointSize[0.02], Point[{0, 2, 0}]}],
ParametricPlot3D[{3 Sin[k z + \omega t], 2 Cos[k z + \omega t], 0}, {t, 0, 2 \pi - 0.5}, PlotStyle -> Blue],
Axes -> {True, True, False},
AxesLabel -> {"x-as", "y-as", "z-as"},
ViewPoint -> {0, 0, -100}]
```

- **3c**

Gebruik om  $\vec{E}_1$  te herschrijven dat  $\vec{e}_y E_0 \cos(kz + \omega t + \pi/2) = \vec{e}_y E_0 \cos(-kz - \omega t - \pi/2) = \vec{e}_y E_0 \sin(-kz - \omega t) = -\vec{e}_y E_0 \sin(kz + \omega t)$ . Dus

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_0 \cos(kz + \omega t) + \vec{e}_y E_0 \sin(kz + \omega t).$$

Nu is het verder gewoon invullen:

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \vec{e}_x E_0 (3 \sin(kz + \omega t) - \cos(kz + \omega t)) + \vec{e}_y E_0 (-\sin(kz + \omega t) + 2 \cos(kz + \omega t)).$$

En dus:

$$\vec{E}_a = E_0 (-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$$

$$\vec{E}_b = E_0 (3\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

- **3d**

$\vec{E}_3$  is elliptisch gepolariseerd. Toelichting:  $\vec{E}_a$  en  $\vec{E}_b$  zijn niet orthogonaal, en ze zijn ook niet parallel (=identiek op een scalaire factor na). Zelfs als ze wel orthogonaal zouden zijn, dan is  $\vec{E}_3$  nog steeds niet circulair gepolariseerd omdat de lengte van beide vectoren niet gelijk is ( $\sqrt{5}$  en  $\sqrt{10}$ ).

## Opgave 4

### ■ 4a

De doorlopen fase in een virtueel plaatje lucht met dikte  $d$  is  $2\pi d / \lambda_0$ .

De doorlopen fase in het plaatje glas met dikte  $d$  is  $2\pi d / \lambda_{\text{glas}}$  met  $\lambda_{\text{glas}} = \lambda_0 / n$ .

Verskil in doorlopen fase is  $\frac{2\pi d (n-1)}{\lambda_0}$ , en gebruiken we tot slot dat  $d = \frac{5\lambda_0}{2(n-1)}$  (gegeven), dan volgt dat het faseverschil  $5\pi$  is.

### ■ 4b

Constructieve interferentie treedt op als het faseverschil een heel aantal malen  $2\pi$  is. Het weglengte verschil is  $b \sin(\theta)$ .

Zonder plaatje glas is het faseverschil dus  $2\pi b \sin(\theta) / \lambda_0$ . Met glasplaatje is het  $5\pi + 2\pi b \sin(\theta) / \lambda_0$ . Met de aanname the  $\theta$

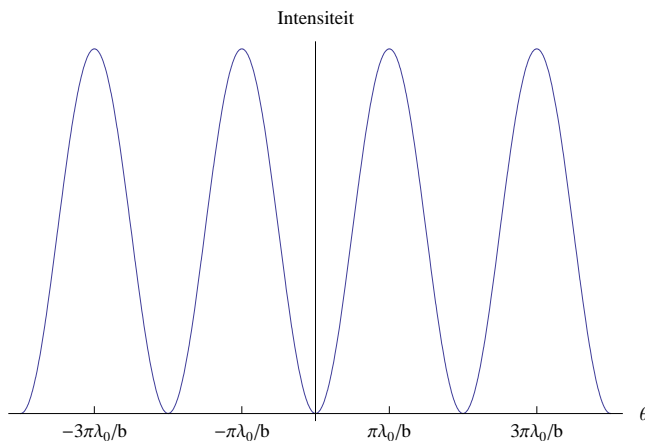
klein is en de eis dat er constructieve interferentie optreedt volgt  $5\pi + \frac{2\pi b \sin(\theta)}{\lambda_0} = 2\pi m$ , met  $m$  een geheel getal, ofwel

$$\theta_m = \frac{2\pi (m - \frac{5}{2}) \lambda_0}{b} \text{ met } m \text{ een geheel getal.}$$

Anders geformuleerd, maar eveneens goed: de hoeken  $\theta_m$  waarbij constructieve interferentie optreedt zijn:

$$\dots, -3\pi\lambda_0/b, -\pi\lambda_0/b, \pi\lambda_0/b, 3\pi\lambda_0/b, \dots$$

### ■ 4c



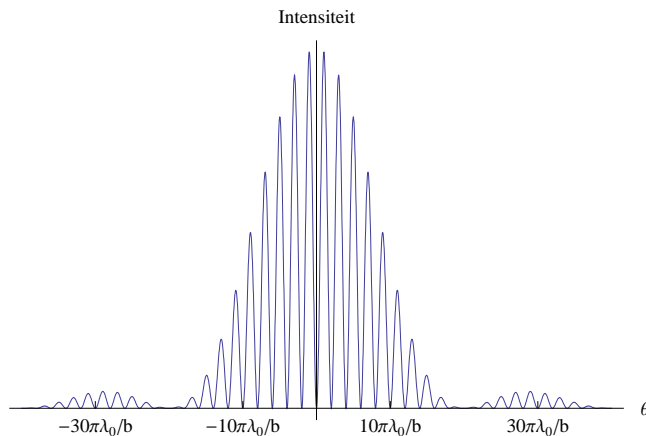
### ■ 4c (hoe de tekening is gemaakt)

```
Plot[Sin[x]^2, {x, -2 π, 2 π}, AxesLabel -> {θ, "Intensiteit"},
```

```
Ticks -> {{{-3 π/2, "-3πλ₀/b"}, {-π/2, "-πλ₀/b"}, {π/2, "πλ₀/b"}, {3 π/2, "3πλ₀/b"}}, None}]
```



#### ■ 4d



Het gevraagde intensiteitspatroon is het product van het patroon uit de vorige opdracht en het diffractiepatroon van één enkele spleet met breedte  $a=b/10$ . Het diffractiepatroon van een enkele spleet is een sinc-functie in het kwadraat.

Enkele kenmerken:

- In bovenstaand plaatje is zitten de maxima op vrijwel dezelfde posities als in het vorige plaatje, de minima zitten op exact dezelfde posities.
- De sinc-functie zorgt voor een "envelop" als in bovenstaande tekening, dit is het gevolg van diffractie
- In de middelste lob van de envelop zitten 10 maxima links en 10 maxima rechts van het centrum.
- Het centrale maximum van de sinc-functie valt samen met het centrale minimum van het interferentiepatroon uit 4c. In het centrum is dus een minimum.
- Elk minimum van de sinc-functie valt samen met een minimum van het diffractiepatroon uit de vorige opgave.

#### ■ 4d (hoe de tekening is gemaakt)

```
sinc[x_] := Sin[x] / x
Plot[sinc[x/10]^2 Sin[x]^2, {x, -20 π, 20 π}, AxesLabel -> {θ, "Intensiteit"},
  Ticks -> {{{-30 π/2, "-30πλ₀/b"}, {-10 π/2, "-10πλ₀/b"},
    {10 π/2, "10πλ₀/b"}, {30 π/2, "30πλ₀/b"}}, None}, PlotRange -> All]
```