Uitwerkingen tentamen Golven en Optica

25-08-2008

Opgave 1

Deze Mathematica functie beschrijft de driehoekige puls.

In[1]:= $f[u\_] := \begin{cases} -0.2 + 0.05\,u & 4 < u \le 6 \\ 0.25 - 0.025\,u & 6 < u \le 10 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$

De fasesnelheid is 100 m/s.

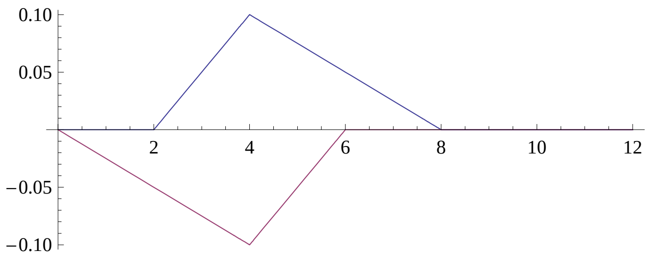
```
In[2]:= F = 100; μ = 1 / 100; v = Sqrt[F / μ]
Out[2]= 100
```

a)

Op t = 0.02 (de bovenste driehoek) en op t=0.10 (de onderste driehoek) ziet de puls er als volgt uit.

```
In[3]:= Plot[{f[x + 100 × 0.02], -f[-x + 100 × 0.10]}, {x, 0, 12}, AspectRatio → 2 / 5]
```

Out[3]=



Toelichting : De puls reist in negatieve x-richting met 100 m/s. Als deze botst met de wand in *x*=0 draait de puls om van teken en reist verder in de positieve *x*-richting. Op *t*=0.1 is de botsing met de wand net achter de rug.

b

Het feit dat y(x, t) geschreven kan worden als f(x + v t) betekent dit y(x,t) een vorm beschrijft die zich onveranderd met een snelheid v in de negatieve x-richting verplaatst: een lopende golf in de negatieve x-richting.

y(x, t) = f(x + v t) voldoet aan de golfvergelijking, want:
Het tweemaal partieel differentieren van y naar x geeft hetzelfde als de tweede afgeleide van f.
Het tweemaal partieel differentieren van y naar t geeft hetzelfde als de tweede afgeleide van f vermenigvuldigd met v^2. (kettingregel!).
Dus $v^2\ y_{xx} = y_{tt}$: de golfvergelijking.

c

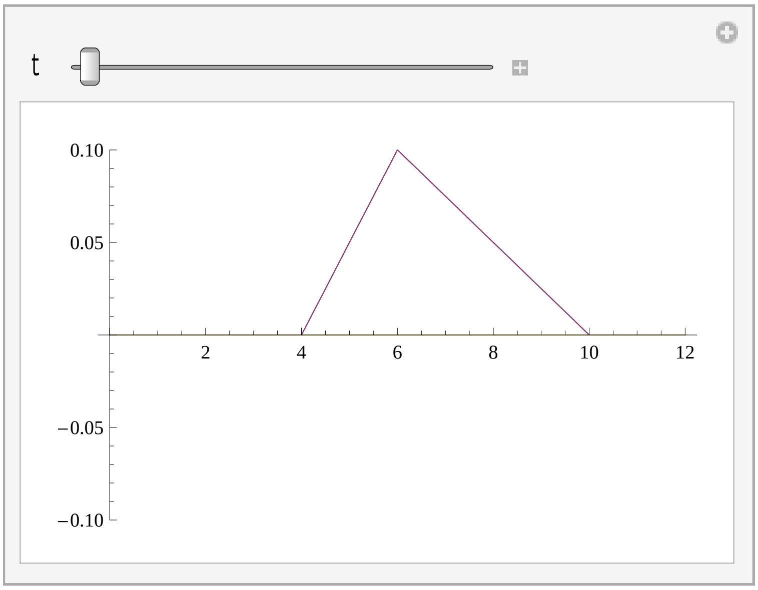
Als de puls botst met de vaste wand op x=0 KAN het geen lopende golf meer zijn in de negatieve x-richting. Dit botsen gebeurt vanaf t=0.04 s. De algemene vorm die op alle tijdstippen geldig is kan dus niet $f(x + v\,t)$ zijn. Het is een combinatie van een naar links en een naar rechts lopende golf. De naar rechts lopende golf, die we $g(x - v\,t)$ noemen lijkt erg veel op de naar links-lopende golf, n.l $g(x) = -f(-x)$. De algemene vorm is dus: $y(x,t) = f(x + v\,t) - f(-x + v\,t)$.

```
In[4]:= y[x_, t_] := f[x + v t] - f[-(x - v t)]
```

Je kunt nu makkelijk voor elk tijdstip de oplossing bekijken:

```
In[5]:= Manipulate[Plot[{y[x, t], f[x + v t], -f[-(x - v t)]},
          {x, 0, 12}, PlotRange → {-0.1, 0.1}], {t, 0, 0.12}]
```

Out[5]=



d)

Dit is een kwestie van invullen. Op t=0 is er nog geen sprake van een naar rechts lopende puls. $v_y(x, t = 0)$ is per definitie de partiële afgeleide y_t en dat is met de kettingregel weer gelijk aan $v\,f'[x]$. Dus $u_k(x, t) = \frac{1}{2}\,\mu\, v^2\,(f\,'(x))^2$
en het gevraagde antwoord volgt omdat $\mu\, v^2$ gelijk is aan de spankracht F.
Voor de potentiële energie geldt een soortgelijke redenering, alleen nog eenvoudiger omdat de factor v^2 dan ontbreekt en er al een F staat.

Als $y(x,t)$ een lopende golf is, dan zijn de kinetiche en potentiële energie aan elkaar gelijk. Elke lopende golf heeft de gedaante $f(x \pm v\,t)$.
Voor t<0.04 is er hier sprake van een lopende golf in de negatieve x-richting
Voor t> 0.1 is er hier sparake van een lopende golf in de positieve x-richting.

Maar als de golf botst met de wand, dat is als 0.04<t<0.10, dan hoeven potentiële en kinetische energie niet aan elkaar gelijk te zijn. (De potentiële energie is dan kleiner dan de kinetische energie; denk maar aan een symmetrische puls waarbij de uitwijking van het koord halverwege de botsing overal gelijk is aan 0. De potentiële energie is dan 0.)

e

Tussen x=4 en 6 m, dus over een lengte van 2 m, is $f'(x)$ gelijk aan 0.05
Tussen x=6 en 10 m, dus over een lengte van 4 m, is $f'(x)$ gelijk aan -0.025.
Op alle andere posities is $f'(x)$ gelijk aan 0.
De totale energie is F maal de integraal van $f'(x)^2$ over alle x-waarden.
We weten dat F is 100 N.

De totale energie (in Joule) in de puls is dus

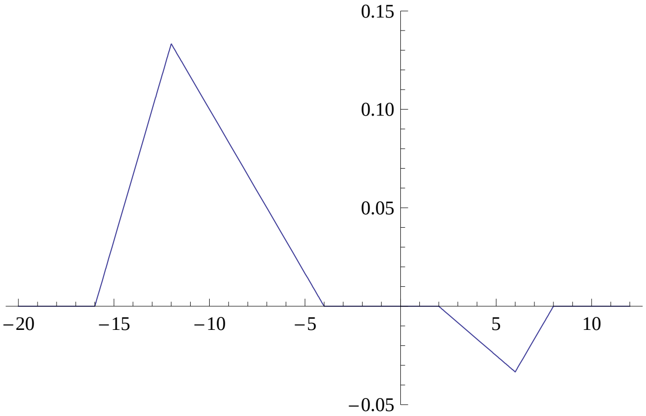
```
In[6]:= 100 (2 * 0.05^2 + 4 *(-0.025)^2)
Out[6]= 0.75
```

N.B. De 3 knikpunten, waar $f'(x)$ niet is gedefinieerd, dragen niet bij tot de totale energie.

g

Ga uit van de schets bij opgave a.
De gereflecteerde puls is op t=0.12 s alleen 2 m verder naar rechts opgeschoven dan op t=0.10 s, en de amplitude ervan is driemaal zo klein geworden vanwege de amplitude-reflectiecoëffiënt r.

De in de negatieve x-richting doorgelaten puls is in zijn geheel tweemaal zo snel (omdat μ 4 maal zo klein is geworden) gegaan en daardoor dus uitgerekt vergeleken met de gereflecteerde puls . De amplitude is 4/3 maal zo groot als die van de oorspronkelijke puls, want t=4/3. En dus 4 keer zo groot als de amplitude van de gereflecteerde puls op de positieve x-as..

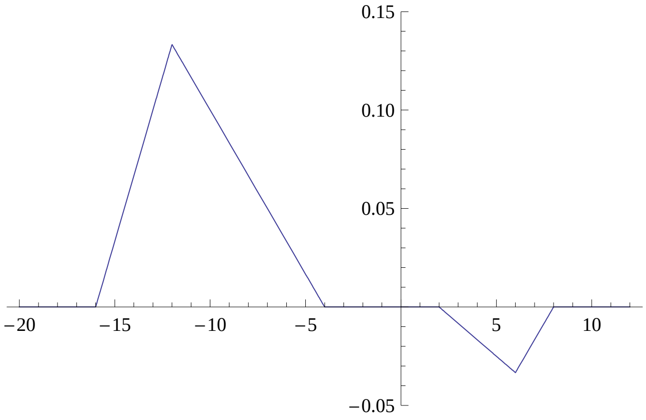


Het geheel kun je realiseren met de volgende functie:

```
In[7]:= y2[x_, t_] := 4/3 f[x/2 + 100 t] - 1/3 f[-(x - 100 t)]
```

Je kunt nu makkelijk voor elk tijdstip na reflectie de oplossing bekijken:

In[8]:=
```
Plot[y2[x, 0.12], {x, -20, 12}, PlotRange → {-0.05, 0.15}]
```

Out[8]=


Doordat in de opgave de amplitude reflectie-coëfficiënt met het verkeerde teken is gegeven wordt het niet fout gerekend als de gereflecteerde puls op t=0.12 "op zijn kop" is getekend.

g

De energie in de gereflecteerde puls is 0.083 J. Dit is r^2 maal 0.75 J, waarbij r=1/3.
De energie in de doorgelaten puls is derhalve 0.750-0.083=0.667 J.

Opgave 2

a

$I = 1/(2\,\mu_0\,c)\,E_{\max}{}^2$

Invullen van numerieke waarden (in SI-eenheden): I=10, $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$, en c= 3. 10^8 geeft voor $E_{\max}$ (de amplitude)

In[9]:=
```
Sqrt[2 * 10 * (4 π 10^-7) * 3. 10^8]
```

Out[9]= 86.8322

Dus de amplitude van het electrisch veld is 87 V/m

b

$B_{max} = E_{max} / c$

Invullen geeft

In[10]:=
```
Sqrt[2 * 10 * (4 π 10^-7) / (3. 10^8)]
```

Out[10]= 2.89441×10^{-7}

Dus de amplitude van het magnetisch veld is 2.9 10^{-7} T.

c

Per golflenge zijn er 2 buiken. Aantal buiken in 30 cm met λ =633 nm is dus .

In[11]:= $2\,\frac{0.3}{633\;10^{-9}}$

Out[11]= 947 867.

Antwoord 9.5 10^5 buiken; iets minder dan een miljoen.

Opgave 3

We beschouwen een glasprisma zoals hieronder getekend. Het prisma is aan alle kanten omringd door lucht. De getekende oppervlakken staan loodrecht op het vlak van het papier. De brekingsindex van het glas is 1.50. Een bundel circulair gepolariseerd licht met intensiteit I_0 valt loodrecht binnen op oppervlak AB.

Gegeven is dat de amplitudereflectie- (r) en transmissiecoëfficiënt (t) voor loodrechte inval gegeven worden door: $r = (n_i - n_t)/(n_i + n_t)$ en $r = 2\,n_i/(n_i + n_t)$, waarbij de subscripts i en t verwijzen naar de media waarin de bundel invalt, respectievelijk breekt.

a)

Wat is de betekenis van een *negatieve* reflectiecoëfficiënt r?

Antwoord

Dit betekent dat bij reflectie de fase van de golf een fasesprong van π maakt.

b)

Is het licht dat van oppervlak AB is gereflecteerd nog steeds circulair gepolariseerd? Verklaar u nader (kort).

Antoord

Ja, omdat het licht loodrecht invalt is de reflectiecoëfficiënt voor beide componenten loodrecht op I_0 gelijk.

Circulair blijt circulair! Omdat de voortplantingsrichting van het gereflecteerde licht tegengesteld is aan die van het invallende licht verandert wel de draairichting. Linksdraaiend wordt na reflectie rechtsdraaiend en omgekeerd.

c)

Welk percentage van de lichtintensiteit wordt gereflecteerd door het oppervlak AB?

Antwoord

De fractie van de gereflecteerde intensiteit is r^2. Het percentage is dus

In[12]:= $100 \frac{(1.00 - 1.50)^2}{(1.00 + 1.50)^2}$

Out[12]= 4.

4 %

d)

Laat zien dat de som van de intensiteiten van de gereflecteerde en doorgelaten bundels gelijk is aan I_0. [Hint: maak gebruik van de Poynting vector]

d)

Het doorgelaten licht valt nu op het oppervlak AC.
Welk percentage van de intensiteit van het doorgelaten licht wordt door AC gereflecteerd?

Antwoord

100% (volledige reflectie).

Voor de kritische hoek geldt Sin[θ_{crit}] = 1.0 / 1.5 = 0.67. De hoek van inval op AC is 45°, dit is groter dan θ_{crit}, dus al het licht wordt gereflecteerd.

e)

Motiveer waarom het gereflecteerde licht wel of niet circulair gepolariseerd is.

Antwoord

Het gereflecteerde licht is nog steeds circulair gepalariseerd. Op elk moment wordt al het licht, ongeacht de polarisatierichting, volledig gereflecteerd

f)

Welk percentage van dit licht wordt doorgelaten in de lucht? Wat kunt u zeggen van de polarisatie van dit licht?

Antwoord

Ook nu zal, niet als bij vraag b), 4% van het licht dat op *BC* valt worden gereflecteerd en dus 96% zal worden doorgelaten in de lucht. Het licht is nog steeds circulair gepolariseerd.

Bonus: Dus 4% van het licht wordt direct gereflecteerd. Van de doorgelaten 96% wordt 96% bij BC direct doorgelaten. Dus 4% van 96% wordt bij *BC* gereflecteerd en moet het glasprisma uiteindelijk ergens verlaten, dus via *AB* of *BC* . In verband met meerdere reflecties is het dus mogelijk dat "dit licht" niet *direct* wordt doorgelaten, maar 2 keer (of zelfs vaker) wordt gereflecteerd, aan BC en AB resp., alvorens het wordt doorgelaten.

Voorbeeld: Berekening van reflectie aan AB. (r=reflectie, t=transmissie)

$$r + trt + trrrt + trrrrrt + ... = r + r\,t^2\left(1 + r^2 + r^4 + ...\right) = r + r\,t^2 \big/ \left(1 - r^2\right)$$

In[13]:=
```
reflectie = r + r t^2 / (1 - r^2) /. t → 1 - r // Together
```

Out[13]= $\frac{2\,r}{1+r}$

Van de invullende bundel wordt 2 r /(1+r) uiteindelijk gereflecteerd, ofwel 7.692%
Van de invullende bundel wordt (1-r)/(1+r) uiteindelijk doorgelaten, ofwel 92.308%.
Van de fractie (1-r) van het licht dat ooit in het prisma komt, wordt dus uiteindelijk de fractie 1/(1+r) doorgelaten.Dit is niet 96% maar iets meer n.l 96.1538%

In[14]:=
```
1/(1 + r) /. r → 0.04
```

Out[14]= 0.961538

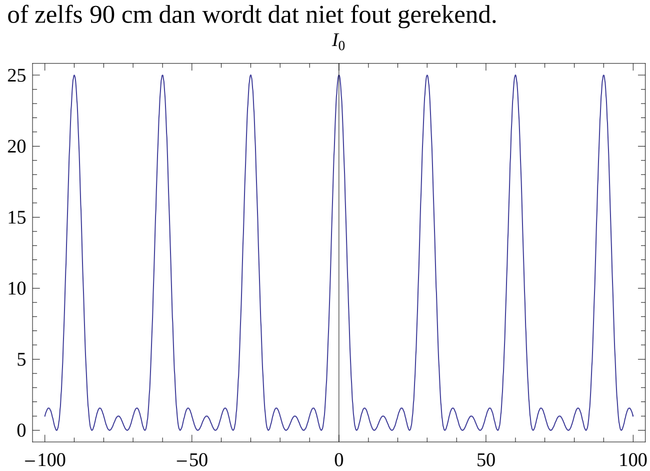
Opgave 4

a)

Hoofdmaxima op $\theta \approx x/l = m\ \lambda/d$, met m=0, ±1, ±2, ...

Met l=1 m, valt het eerste hoofdmaximum dus op x =1 * (600 10^{-9}) / (2 10^{-6}) = 0.3 m.

Maxima van 25 I_0 op 0, ±30 cm. Minima op 6, 12,18 en 24 cm. En daarna weer op 36 cm. Voor verder weggelegen maxima is de hoek θ niet meer klein en mag je bovenstaande uitdrukking niet zondermeer toepassen. Maar als je ze toch geeft op 60 of zelfs 90 cm dan wordt dat niet fout gerekend.



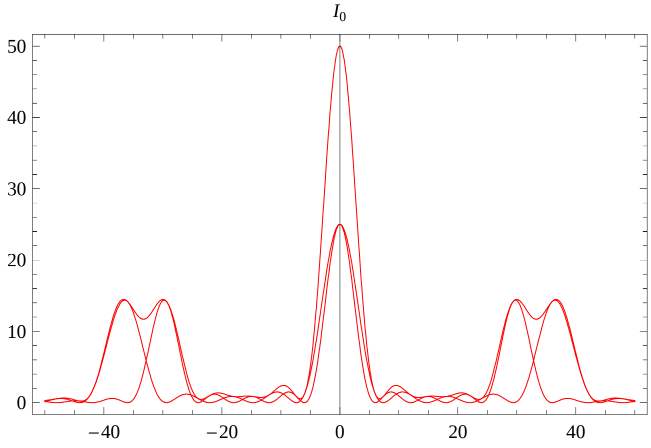
b)

De 2 verschillende golflengtes hebben niets met elkaar te maken. Het licht met λ_2 is ongecorreleerd met het licht met λ_1. Daarom treedt geen interferentie tussen verschillende λ`s op en mag je de afzonderlijke intensiteitspatronen gewoon optellen

■ c)

Rayleigh's criterium zegt dat het hoofdmaximum van λ_2 en de positie van het eerste minumum na het hoofdmaximum van λ_1 (dat is op 36 cm) samenvallen.
Maar het kan net zo goed zijn dat het minum van λ_2 vor het eerste hoofdmaximum samenvalt met het eerste hoofdmaximum van λ_1 (dat is op 30 cm).

Belangrijk is dat in de schets een minimum van het ene patroon (ongeveer) samenvalt met het naburige hoofdmaximum van het andere patroon.



■ d)

Het eerste criterium geeft $\lambda_2 = 6/5\,\lambda_1$. Het andere $\lambda_2 = 5/4\,\lambda_1$. Elke waarde van λ_2 die binnen deze grenzen ligt is correct.
Dus $720\,\text{nm} \leq \lambda_2 \leq 750\,\text{nm}$.

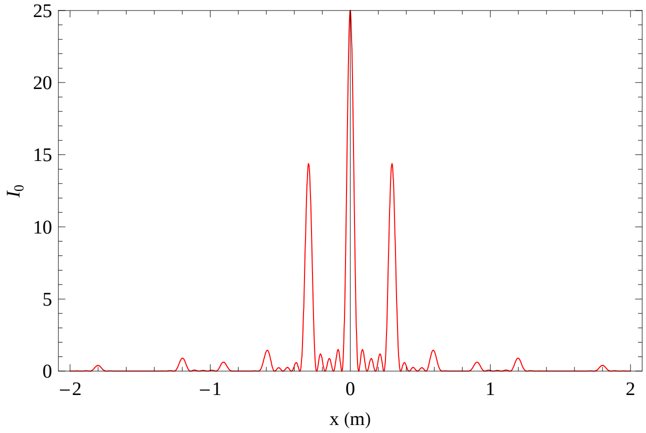
■ e

Het centrale maximum houdt intensiteit 25 I_0. Het eerste diffractie mimnimum van een enkele spleet ligt op 75 cm. Maar daar ligt geen hoofdmaximum. Die liggen op 30 cm, 60 cm, etc.

Pas het 5^e hoofdmaximum (op 150 cm!) valt samen met een diffractieminimum van een enkele spleet. Dit ontbreekt. Je zou dit een "missing hoofdmaximum" kunnen noemen. De afbuighoek in dit geval is echter zo groot dat er geen sprake meer is van de Fraunhoferbenadering, en alle gebruikte formule's zijn dus niet geldig.
In praktijk zul je voor dergelijke spleten dan ook geen missing 5^e hoofdmaximum zien. Je ziet één hoofdmaximum, en misschien in de buurt van de 60 cm nog een tweede.

Geef je, zonder verdere beschouwingen, het antwoord dat het 5^e, 10^e hofdmaximum ontbreken, dan wordt dat goed gerekend.
Geef je aan dat de afbuighoek "te" groot is om het al dan niet optreden van een missing hoofdmaximum waar te nemen, dan wordt dat ook goed gerekend.

In de Fraunhoferbenadering ziet het intensiteitpatroon er als volgt uit.



De omhullende (voor zover je daarvan kunt spreken) heeft een nulpunt tussen met 2^e en het 3^e hoofdmaximum. De getekende hoogte van de hoofdmaxima is niet zo belangrijk.