Tentamen Golven en Optica

25 juni 2008, uitwerking

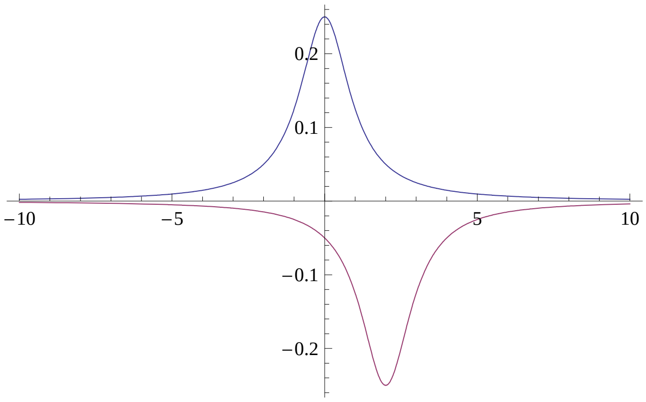
1 Lopende golven en interferentie op een snaar

■ a

In[1]:=
```
y0 = 1;
y1[x_, t_] := y0 / ((2 x - 300 t)^2 + 4)
y2[x_, t_] := -y0 / ((2 x + 300 t - 4)^2 + 4)
```

In[4]:=
```
Plot[{y1[x, 0], y2[x, 0]}, {x, -10, 10}, PlotRange → All]
```

Out[4]=



y_1 heeft een maximum in x = 0. De waarde van dit maximum = 1/4 y_0. De halve hoogte (op t=0) verkrijg je als $(2x - 300 * 0)^2 = 4$, dus de hoogte van de puls is de helft van het maximum in de punten $x = -1$ en $x = 1$. De volle breedte op halve hoogte is dus gelijk aan 2 m.

y_2 heeft geen maximum, maar een minimum. Maar ook in dat minimum is de uitwijking maximaal. De vorm is gelijk aan die van y_1 (afgezien van het teken). De piek zit nu bij x=2 en de puls bereikt de halve hoogte in $x = 1$ en $x = 3$. De volle breedte op halve hoogte is eveneens gelijk aan 2 m.

■ b

Beide pulsen volden aan de golfvergelijking omdat het functies zijn van x - v t.
Voor y_1 is de numerieke waarde van v gelijk aan 150. Namelijk

$$y_1[x, t] = f_1[x - 150\,t]$$

waarbij

$$f_1[z] = \frac{y_0}{(2\,z)^2 + 4}.$$

Alle pulsen die geschreven kunnen worden als een functie zijn van $x - v\,t$, waarbij v een constante is, zijn n.l. oplossing van de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 y[x,\ t]}{\partial t^2} = v^2\ \frac{\partial^2 y[x,\ t]}{\partial x^2}.$$

Ook y_2 kan worden geschreven als een functie van x-v t, alleen is de waarde van v dan gelijk aan -150.

c

Eigenlijk is deze vraag al beantwoord:
y_1 loopt met een snelheid van 150 m/s in de positieve x-richting en
y_2 loopt met een snelheid van 150 m/s in de negatieve x-richting.

d

De spankracht F = $\mu\, v^2$= 0.01 kg/m * (150 m/s) ^2 = 225 N

e

De transversale snelheid verkrijg je door de uitwijking partieel te differentiëren naar de tijd:

In[5]:= `D[y1[x, t] + y2[x, t], t]`

Out[5]= $$\frac{600\ (-300\ t + 2\ x)}{\left(4 + (-300\ t + 2\ x)^2\right)^2} + \frac{600\ (-4 + 300\ t + 2\ x)}{\left(4 + (-4 + 300\ t + 2\ x)^2\right)^2}$$

Dit levert geen mooie uitdrukking op.

f

Uit het plaatje dat bij a) is getekend zie je dat de pulsen tegengesteld zijn. Vanwege het feit dat de pulsen even snel maar in tegengestelde richting reizen kun je concluderen dat ze elkaar in x=1 ontmoeten en zullen "opheffen". y_1 (y_2) heeft 1/150 s nodig om van x=0 (2) naar x=1 te reizen.

Uit de gegeven functie zie je direct dat 300 t -4 gelijk moet zijn aan -300 t, opdat beide pulsen, op een min-teken na, gelijk zijn. Ofwel 600 t =4, dus t=1/150.

Je kunt ook invullen:

In[6]:= $y_1[x,\ t] + y_2[x,\ t]\ /.\ t \to \frac{1}{150}$

Out[6]= 0

Hoe je het ook bedenkt: op t=1/150 s is de uitwijking van de snaar overal gelijk aan 0.

g

Op t=1/150 s, is de snaar volkomen recht. Hij dus totaal niet uitgerekt t.o.v. zijn ruststand; op geen enkel punt. De potentiële energie is gerelateerd aan die uitrekking. Omdat die uitrekking ontbreekt is de potentiële energie gelijk aan 0.

N.B. Verwar deze energie niet met de energie die je in de snaar stopt als je hem opspant. Ook dan rek je hem uit. Voor de oneindig lange snaar uit deze opgave is die energie trouwens oneindig groot.

2 Geluidsgolven en Doppler effect

In[7]:=
```
Remove["Global`*"]
```

a

Hoekfrequentie, golflente en golfgetal zijn

In[8]:=
```
f = 1000; v = 340.;
{ω = 2 π f , λ = v / f}
```

Out[9]=
```
{2000 π, 0.34}
```

In[10]:=
```
k = 2 π / λ
```

Out[10]=
```
18.48
```

Dus $\omega = 2\pi\ 10^3$ rad/s = $6.28\ 10^3$ rad/s, λ= 0.34 m en k is 18.5 m^{-1}.

b

De drukamplitude p_{max} is gelijk aan B k A.

In[11]:=
```
pmax = B k A /. {B → 1.42 10^5, A → 0.1 × 10^-3}
```

Out[11]=
```
262.415
```

Ook vlak bij de luidspreker is deze 262 Pa dus nog altijd zo'n 400 maal zo laag als de atmosferische druk van 10^5 Pa..

c

De intensiteit vlak bij de luidspreker is

$$\frac{p_{max}^2}{2\,\rho\,v} = \frac{p_{max}^2}{\frac{2\,B\,v}{v^2}} = \frac{v\,p_{max}^2}{2\,B}.$$

In vraag b) hebben we p_{max} al berekend. Het totale vermogen dat wordt uitgezonden is deze intensiteit vermenigvuldigd met de oppervlakte van de luidspreker.

In[12]:=
```
v = 340; B = 1.42 10^5; opp = 0.01; vermogen = (v pmax^2)/(2 B) opp
```

Out[12]=
```
0.824402
```

Het totale vermogen is dus 0.82 W.

d

$$\text{intensiteit} = \frac{\text{vermogen}}{4\,\pi\,r^2}$$

100 decibel correspondeert met een intensiteit van 0.01W/m^2.

In[13]:= `r = Sqrt[vermogen / (4 π 10^-2)]`

Out[13]= 2.56132

Op 2.56 m afstand van de luidspreker is de geluidsintensiteit 100 dB.

▪ e

Frequentie die de muur ontvangt is $f * \frac{v+v_{Muur}}{v}$.
Frequentie die door de stilstaande microfoon wordt ontvangen is $f * \frac{v+v_{Muur}}{v} * \frac{v}{v-v_{Muur}}$

Invullen van de numerieke waarden

In[14]:= $1000.\ \frac{340+17}{340-17}$

Out[14]= 1105.26

De frequentie van het ontvangen signaal is dus 1105 Hz.

---

3 Polarisatie

▪ a

Er zijn 2 oplossingen voor deze vlakke golf:

$$\vec{E}[x, y, z, t] = E_0 \{0, \mathrm{Sin}[k\,x - \omega\,t], \mathrm{Cos}[k\,x - \omega\,t]\}$$

en

$$\vec{E}[x, y, z] = E_0 \{0, \mathrm{Sin}[k\,x - \omega\,t], \mathrm{Cos}[k\,x - \omega\,t]\}.$$

Op $x = 0$ zijn deze 2 oplossingen dus als volgt:

$$\vec{E}[0, y, z, t] = E_0 \{0, -\mathrm{Sin}[\omega\,t], \mathrm{Cos}[\omega\,t]\}$$

en

$$\vec{E}[0, y, z, t] = E_0 \{0, \mathrm{Sin}[\omega\,t], \mathrm{Cos}[\omega\,t]\}$$

▪ b

Als $\omega\,t$ gelijk is aan $\pi/2$, dan is voor het eerst na $t = 0$ de z-component van de golf gelijk aan 0, en is er (in het vlak x=0) alleen naar een y-component van het E-veld. Dus $t = \frac{\pi}{2\,\omega} = \frac{\pi}{2\,c\,k}$.

▪ c

Golflengte van licht gepolariseerd in y-richting is λ / n_y.
Golflengte van licht gepolariseerd in z-richting is λ / n_z.
Aantal golven in plaatje met dikte D is $D\,n_y / \lambda$ en D n_z / λ, voor beide polarisatierichtingen, respectievelijk.

Als deze 2 aantallen 1/4 (of 3/4, 5/4, etc) verschillen, dan zijn de golven in de y- en z-richting niet langer $\pi/2$ uit fase, zoals het geval is voor de sinus en de cosinus, maar dan zijn ze 0 (of π of 2π, etc.) uit fase. De y- en z-component van het E-veld zijn dan dus juist in fase en de polarisatierichting is of {0, 1,1} of {0,1,-1}.

De conditie voor lineair gepolariseerd uittredend licht is dus:

$$|n_y - n_z|\, D/\lambda = \Delta n\, D/\lambda = 1/4 + 1/2\, m,\quad m \in \mathbb{N}.$$

Kiezen we de eenvoudigste situatie, het dunste plaatje, dan is *m* gelijk aan 0. Dus

$$D = \frac{\lambda}{4\,\Delta n} = \frac{\pi}{2\,k\,\Delta n}.$$

d

De gereflecteerde component van een circulair gepolariseerde invallende vlakke golf is in dit geval lineair gepolariseerd. De polaristierichting is evenwijdig aan het scheidingsvlak tussen de 2 media en natuurlijk loodrecht op de voortplantingsrichting van de gereflecteerde golf. Anders geformuleerd: De polarisatierichting van het gereflecteerde licht is loodrecht op het vlak waarin een invallende, gereflecteerde en gebroken lichtstraal ligt.

Licht waarvan de polarisatierichting in het vlak van inval en breking (en reflectie) ligt wordt bij inval onder de Brewsterhoek volledig doorgelaten.

De gebroken lichtstraal is dus altijd elliptisch gepolariseerd. De amplitudes in beide polarisatierichtingen zijn n.l. niet langer gelijk. In de ene richting (=vlak van inval, breking en reflectie) wordt n.l. wel alles doorgelaten, maar in de andere richting niet (daarvan wordt een deel gereflecteerd).

---

4 Diffractie

In[15]:=
```
Remove["Global`*"]
```

a

Deze uitdrukking geeft weer dat het diffractiepatroon geschreven kan worden als het product van het diffractiepatroon van een enkele spleet (met eindige breedte *a*) en het diffractiepatroon van een dubbele spleet met spleetafstand *d*. maar met verwaarloosbare spleetbreedte.

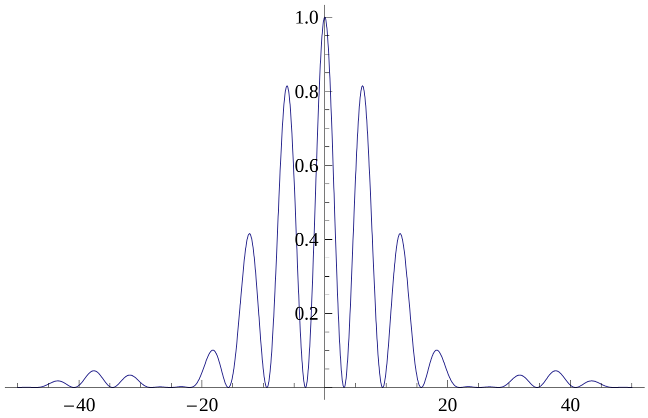
b

In de Fraunhoferbenadering vervangen we Sin[θ] veilig door θ.

In[16]:=
$$\text{intensiteit} := \left(\frac{\text{Sin}\left[\frac{k\,\theta\,a}{2}\right]}{\frac{k\,\theta\,a}{2}}\right)^2 \text{Cos}\left[\frac{k\,\theta\,d}{2}\right]^2;$$

In[17]:=
$$k = 1;\ d = 1;\ a = \frac{d}{4};$$

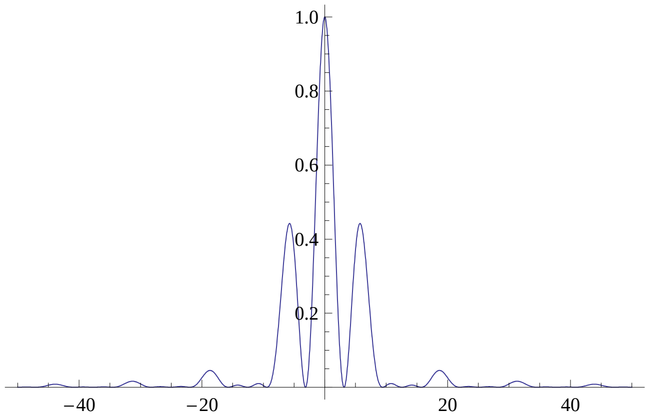
In[18]:= `Plot[intensiteit, {θ, -50, 50}, PlotRange → All]`

Out[18]=


Maxima treden, als *a* veel kleiner is dan *d*, *ongeveer* op als $\frac{k\,\Theta\,d}{2}$ een veelvoud is van π, dus als $\Theta = \frac{2\,n\,\pi}{k\,d}$ met *n* een geheel getal. De minima liggen precies op de posities $\Theta = \frac{n\,\pi}{k\,d}$, waarbij *n* een oneven getal is.
Echter het vierde maximum (voor n=4) op $\Theta = \frac{2\ \pi}{k\,d/4}$ ontbreekt. Hier ligt juist een minimum. Dit minimum wordt veroorzaakt door het nulpunt van $\mathrm{Sin}\left[\frac{k\,\Theta\,a}{2}\right]$. Ook het 8^e, 12^e, ... maximum ontbreekt, maar de intensiteit in de omgeving ervan is zo klein dat dit niet opvalt.

In[19]:= $k = 1;\ d = 1;\ a = \frac{d}{2};$

In[20]:= `Plot[intensiteit, {θ, -50, 50}, PlotRange → All]`

Out[20]=


Als *a*=*d*/2, ontbreekt al het tweede maximum. In de schets teken je dus naast het centrale maximum, de twee eerste orde maxima, geen tweede orde maxima, maar dus wel de derde orde maxima. De hoogte van de maxima moet in je schets overduidelijk afnemen. De derde orde maxima moeten in je schets lager dan 1/4 van het hoofdmaximum zijn. Het tekenen van de twee piepkleine maxima rondom de plaats waar het tweede orde maximum zou komen, wordt hier wel degelijk beoordeeld.

■ C

Dit is een kweste van gonio. Kies rechts de formule vormule één spleet met breedte 2*a*, en links die voor 2 spleten die elk breedte *a* hebben, maar ook een onderlinge afstand die gelijk is aan *a*.

In[21]:= $\left(\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{k\,\theta\,a}{2}\right]}{\frac{k\,\theta\,a}{2}}\right)^2 \mathrm{Cos}\left[\frac{k\,\theta\,a}{2}\right]^2 == \left(\frac{\mathrm{Sin}[k\,\theta\,a]}{k\,\theta\,a}\right)^2$ `// Simplify`

Out[21]= `True`

De reden: `Sin[2 a] == 2 Sin[a] Cos[a]`.