Tentamen Golven en Optica

Uitwerking

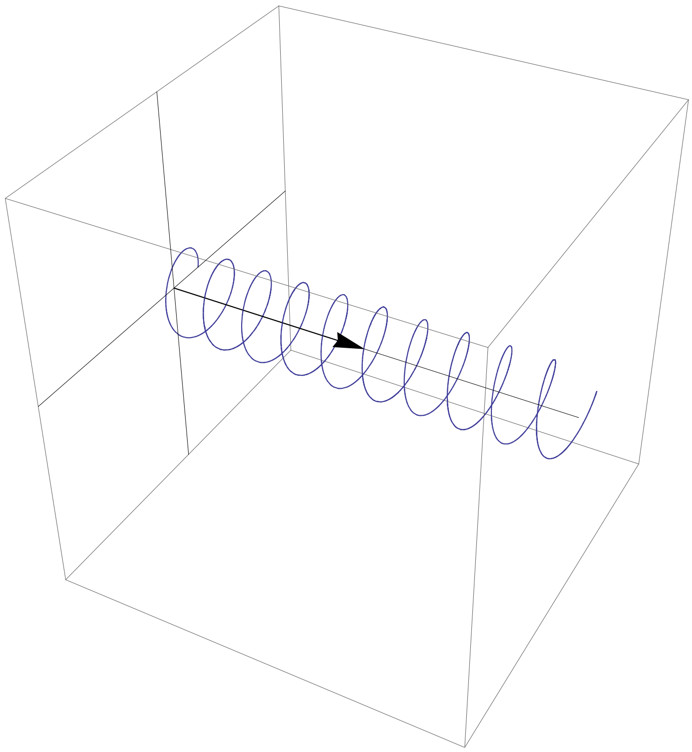
29 juni 2011

Opgave 1

a

```
uitwijking = {0, A Cos[k (x - v t)], A Sin[k (x - v t)]}
```

Je schets is zoiets wat je hieronder ziet: een spiraal; een foutieve draairichting van de spiraal in je schets is geen criterium om hem af te keuren, wel belangrijk is dat de pijl in de richting van (zoals wordt verondersteld) de positieve x-as wijst.



b

Ja, de golflengte is $\frac{2\pi}{k}$. De vorm herhaalt zich met die afstand, en dat is per definitie één golflengte.

c

Omdat de uitwijking altijd in het yz-vlak is, en de golf zich voortplant langs de x-as. Het yz-vlak is loodrecht op de x-as, en daarom spreken we van een transversale golf.

d

De enige grootheid die vastligt is v, want $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. De amplitude A, en het golfgetal k kun je vrij kiezen. Je kunt de golf zo groot maken als je wilt (tenminste theoretisch) en je kunt het aantal draaiingen (zie de schets bij vraag a) per meter ook zo groot maken als je wilt.

Als je opmerkt dat A niet echt vrij is omdat het koord dan "een stuk" langer wordt dan het koord met A=0, dan is dat een prima opmerking, maar er wordt eigenlijk vanuit gegaan dat A veel kleiner is dan de gelflengte $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, en dat de spankracht dus hetzelfde is ongeacht of er nu wel een golf loopt of niet.
Als je dus als extra beperking meldt dat het product A*k veel kleiner dan 1 moet zijn verdien je bonus!

e

Hiervoor moet je de 2 componenten (uitwijking in y-rchting en uitwijking in z-richting) elk naar de tijd differentiëren

```
snelheid = {0, D[A Cos[ k (x - v t)], t],  D[A Sin[ k (x - v t)], t]}
{0, A k v Sin[k (-t v + x)], -A k v Cos[k (-t v + x)]}
grootteSnelheid = Simplify[Sqrt[snelheid.snelheid] , Assumptions → {A > 0, k > 0, v > 0}]
A k v
```

De snelheid hangt dus helemaal niet van x en t af en heeft een grootte $A\,k\,v$. (Gebruik gewoon $\sin^2 + \cos^2 = 1$, ipv *Mathematica*)

De kinetische energie per lengteenheid is dus $\frac{1}{2}\mu\,(A\,k\,v)^2 = \frac{1}{2}\mu\,v^2 A^2 k^2 = \frac{1}{2} F A^2 k^2$, omdat voor de fase snelheid v geldt: $v^2 = \frac{F}{\mu}$.

f

We moeten hier de lengte van de spiraal berekenen die in a) geschetst is.

Steeds als de golf in de x - richting λ vooruitkomt wordt er één rondje gemaakt (met straal A). Bedenk nu een cylinder met straal A, met hoogte $\frac{2\pi}{k}$ en met de x-as als centrale as; snij die open en leg hem plat neer. Je ziet dan dat de spiraalvormige baan de schuine zijde van een rechthoekige driehoek is geworden. De ene rechthoekszijde heeft lengte $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, en de andere heeft lengte 2π A.

De lengte van de schuine zijde is dus $\sqrt{\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 + (2\pi A)^2} = 2\pi\sqrt{A^2 + \frac{1}{k^2}}$. Oorspronkelijk (voor een snaar zonder golf) was de lengte $\frac{2\pi}{k}$. De "uitrekfactor" is dus $\sqrt{1 + A^2 k^2}$, en de lengte van een stuk snaar dat eerst lengte L_0 had wordt, als de golf erover loopt, dus $L_0\sqrt{1 + A^2 k^2}$. Als $A\,k \ll 1$ wordt die lengte benaderd door $L_0\left(1 + \frac{A^2 k^2}{2}\right)$. De potentiële energie in een stuk koord met lengte L_0 is dus $\frac{1}{2} F L_0 A^2 k^2$, en de potentiële energie per lengte-eenheid derhalve $\frac{1}{2} F A^2 k^2$.

g

De uitwijking van de gereflecteerde golf is, samen met de inkomende golf

```
{0, A Cos[k (x - v t)] - A Cos[k (x + v t)], A Sin[k (x - v t)] + A Sin[k (x + v t)]}
```

Let hier er goed op dat in $x = 0$ de uitwijking nul moet zijn in zowel de x- als in de y-richting.

Voor het vereenvoudigen gebruik je de gonio formule's uit het formuleblad. Met mathematica is het eenvoudig met Simplify

```
g = {0, A Cos[k (x - v t)] - A Cos[k (x + v t)],
   A Sin[k (x - v t)] + A Sin[k (x + v t)]} // Simplify
```

```
{0, 2 A Sin[k t v] Sin[k x], 2 A Cos[k t v] Sin[k x]}
```

Je ziet dat er scheiding van variabelen mogelijk is. De x-afhankelijkheid van zowel de y- als de z-component is Sin[k x]. Dit duidt dus op een staande golf patroon. Als je daarna naar de tijdcomponent van de uitwijking gaat kijken dan zie je dat het een ronddraaiend uitwijking wordt, als de tijd met $\frac{2\pi}{k v}$ toeneemt wordt er één rondje gedraaid. Dit is dus een "echte" staande golf. De amplitude in een buik is **altijd** 2A, alleen draait die golf dus rondjes (om de x-as)!

h

De snelheidsvector is

```
D[g, t]
```

```
{0, 2 A k v Cos[k t v] Sin[k x], -2 A k v Sin[k t v] Sin[k x]}
```

De lengte van deze vector op positie x is dus $2 A k v \mathrm{Sin}[k x]$ onafhankelijk van t. De kinetische energie per lengte eenheid is dus (analoog aan de redenering bij e), gelijk aan $2 F A^2 k^2 \mathrm{Sin}[k x]^2$. Als je daarna middelt over alle mogelijke x-waarden dan geeft de $\sin^2$ term een factor $\frac{1}{2}$; de plaatsgemiddelde kinetische energie per lengteeenheid is dus $F A^2 k^2$.

i (bonus)

Zoals uit vraag h) volgt is de vorm van de snaar op elk moment hetzelfde, en wel $2 A \mathrm{Sin}[k x]$; het feit dat die sinus ronddraait verandert niets aan de vorm.
De potentiële energie per lengte-eenheid is, zoals geleerd in Hoofdstuk 15, te schrijven als $\frac{1}{2} F \, \partial_x y[x, t]^2$, tenminste als $A k \ll 1$. In deze situatie geeft dit.

```
1 / 2 F (D[ 2 A Sin[k x], x]) ^2
```

$2 A^2 F k^2 \mathrm{Cos}[k x]^2$

De potentiële energie per lengte-eenheid is dus $2 F A^2 k^2 \mathrm{Cos}[k x]^2$.
Samen met de kinetische energie per lengte-eenheid, die in h) is berekend vind je dan dat de totale energie per lengte-eenheid gelijk is aan $2 F A^2 k^2 \mathrm{Cos}[k x]^2 + 2 F A^2 k^2 \mathrm{Sin}[k x]^2 = 2 F A^2 k^2$. Kortom, deze hangt niet van x en t af.

Opgave 2

a

De intensiteit op 10 m is dus $1 \frac{W}{m^2}$ zoals volgt uit de definitie van de decibel.. Uit de formules op het formuleblad volgt dat $I = \frac{v p_{max}^2}{2 B}$ (deze variant staat er niet bij), ofwel $p_{max} = \sqrt{\frac{2 B I}{v}}$. Invullen:

```
pmax = Sqrt[2 B i / v] /. {i → 1, B -> 1.4 × 10^5, v → 340}
```

```
28.6972
```

Dus 29 Pa op 10 m van de bron, en dat is verdraaid hard. Op 5m van de bron is de drukamplitude nog eens 2 maal zo groot, dus zo'n 57 Pa.

b

```
4 π r^2 * 1 /. r → 10 // N
```

```
1256.64
```

Dus zo' n 1.3 kW aan akoestich vermogen.

c

De golflengte van het geproduceerde geluid is 0.5 m.($\frac{340\ \text{m/s}}{680\ \text{Hz}}$). De tweede bron is 5 meter van de waarnemer, ofwel 10 golflengtes, en de eerste bron is 20 golflengtes verwijderd.
Deze twee bronnen kunnen elkaar alleen uitdoven op de plaats van de waarnemer als ze precies **uit** fase zijn ofwel in tegenfase.

d

Het akoestisch vermogen van de tweede bron die ook een geluidsniveau van 120 dB moet produceren op de plaats van de waarnemer is natuurlijk 4 maal zo klein als die van de eerste bron en dat is zo'n 314 W.

```
4 π r^2 * 1 /. r → 5 // N
```

```
314.159
```

e

Je moet hiertoe de volgende vergelijking oplossen

$$\text{NSolve}\left[\sqrt{10^2 + x^2} - \sqrt{5^2 + x^2} == 5 - \frac{1}{2} * \frac{1}{2},\ x\right]$$

$$\{\{x \to -2.33827\},\ \{x \to 2.33827\}\}$$

Als je de wortels benadert krijg je iets dat je ook handmatig makkelijk kunt berekenen:

$$\text{Solve}\left[10\left(1 + \frac{x^2}{200}\right) - 5\left(1 + \frac{x^2}{50}\right) == 5 - \frac{1}{2 \times 2},\ x\right]$$

$$\left\{\left\{x \to -\sqrt{5}\right\},\ \left\{x \to \sqrt{5}\right\}\right\}$$

In ieder geval wordt elk antwoord tussen 2 en 2.5 meter goed gerekend.
Belangrijk is dat je je realiseert dat in zo'n geval het weglengteverschil niet 10 λ is maar een halve λ **minder**, dus 4.75 m (want λ=0.5 m). Maar als je dat niet weet kun je de gevraagde afstand wellicht ook niet correct berekenen.

Opgave 3

a

Omdat er tussen de hoofdmaxima 8 minima zitten zijn er 9 spleten, dus N=9.

b

De centrale intensiteit is 81 (dat is N^2) keer zo groot, dus $I(0) = 81\, I_0$.

c

Minima treden op als Sin[N α]=0, en tegelijkertijd Sin[α] ongelijk is aan 0. Daarna is het domweg invullen.

$$N\,\alpha = m\,\pi,$$
$$\frac{1}{2}\,N\,k\,d\,\mathrm{Sin}[\theta] = m\,\pi,$$
$$\frac{N\,d\,\mathrm{Sin}[\theta]}{\lambda} = m,$$
$$\mathrm{Sin}[\theta] = \frac{m\,\lambda}{N\,d},$$
$$\theta = \mathrm{Arcsin}\left[\frac{m\,\lambda}{N\,d}\right],$$

met m$\in\mathbb{Z}$, **maar m mag geen veelvoud zijn van N**, want dan is er juist een maximum. Verder kan m in absolute waarde niet groter zijn dan $\frac{N\,d}{\lambda}$, want een afbuighoek is altijd kleiner dan 90°.

d

Zie boek.

Alternatief en wel zo helder: Het m^{de} hoofdmaximum voor een golflengte $\lambda+\Delta\lambda$ ligt bij $\mathrm{Sin}[\theta] = \frac{m\,(\lambda+\Delta\lambda)}{d}$; deze hoek hangt niet van N af. Het eerste minimum na het m^{de} hoofdmaximum van een N-spleten systeem dat belicht wordt met een golflengte λ ligt bij $\mathrm{Sin}[\theta] = \frac{(m\,N+1)\,\lambda}{N\,d}$, zie antwoord op vraag c).
Voor het chromatisch scheiden vermogen geldt dat die hoeken precies even groot zijn. Want per definitie vind je het maximum van de "iets andere kleur" $\lambda+\Delta\lambda$ dan in dezelfde richting (dus: onder dezelfde afbuighoek) als het aangrenzende minimum van de "kleur" λ. Dus $\frac{m\,(\lambda+\Delta\lambda)}{d} = \frac{(m\,N+1)\,\lambda}{N\,d}$ ofwel $\frac{m\,\lambda}{d} + \frac{m\,\Delta\lambda}{d} = \frac{m\,N\,\lambda}{N\,d} + \frac{\lambda}{N\,d}$, zowel links als rechts van het =-teken staat een $\frac{m\,\lambda}{d}$, wat overblijft is $\frac{m\,\Delta\lambda}{d} = \frac{\lambda}{N\,d}$, de gemeenschappelijke factor d kun je wegdelen, ofwel $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m\,N$.

e

Er zitten maar twee hele oscillaties van de sinus in één zo'n puls. Eén hele oscillatie duurt n.l $\frac{\lambda}{c} = \frac{600\;10^{-9}}{3\;10^{8}} = 2\;10^{-15}$s.

f

Als je ervoor zorgt dat het weglengte verschil van een punt - verweg onder een hoek θ - tot 2 naburige spleten 2λ is of meer zal er dus zeker GEEN interferentie optreden dus als $d\,\mathrm{Sin}[\theta] \geq 2\,\lambda$, ofwel $\mathrm{Sin}[\theta] \geq \frac{2\,\lambda}{d}$. Onder die hoeken kan het voorkomen dat via het ene pad de puls nog niet is aangekomen, terwijl via het andere pad de puls al volledig is gepasseerd.

g

Je krijgt dus alleen het centrale maximum, en het eerste hoofdmaximum bij een hoek met $\mathrm{Sin}[\theta] = \frac{\lambda}{d}$.

h

Het centrale maximum heeft een intensiteit van 81 I_0. zie vraag b). Dat verandert niet door een korte laserpuls. Alleen zal, als de puls is afgelopen er natuurlijk niets meer te zien zijn. In het eerste hoofdmaximum interfereert echter altijd alleen maar het licht van 2 spleten met elkaar. Dat geeft een maximale intensiteit van 4 I_0.

i

De pulsbreedte van het centrale hoofdmaximum is gelijk aan de breedte van de laserpuls, dus 4 10^{-15}s.

In het eerste hoofdmaximum duurt de puls veel langer. Kijk je onder de hoek θ die hoort bij dat eerste hoofdmaximum, dan komt het licht van de bovenste puls het eerste aan, na 2 10^{-15} s komt daar het licht van de een na bovenste spleet bij en interfereren ze dus.
Na 4 $*10^{-15}$s komt het licht in de derde spleet aan, maar juist dan komt er in de eerste spleet al niets meer aan. Je hebt tussen 4 en 6 maal 10^{-15}s dus de interferentie van spleet 2 en 3. Dat gaat zo door totdat na 20 * 10^{-15}s ook het licht dat via de onderste spleet (de negende) is gekomen zal uitdoven.

Kortom, de totale puls duurt $20 * 10^{15}$ s. Gedurende $2 * 10^{15}$ s aan zowel het begin als eind is de intensiteit I_0, gedurende de 16 10^{-15} s in het midden is de intensiteit 4 I_0. Elke pulsbreedte tussen 16 en $20*10^{-15}$s is daarom goed. Meer algemeen: elk antwoord tussen $(N-1) * 2 * 10^{-15}$s en $(N+1) * 2 * 10^{-15}$ s is goed.

Opgave 4

a

De golflengte is $\lambda \frac{n_i}{n_t}$. De frequentie verandert niet. Het maakt niet uit of je de frequentie f of de hoekfrequentie ω neemt $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{n_i \lambda}$, en de hoekfrequentuie ω is 2π maal zo groot.

b

Brewster's wet zegt $\mathrm{Tan}[\theta_p] = \frac{n_i}{n_t}$, maar dan zegt diezelfde Brewster's wet dat $\mathrm{Tan}[\theta_q] = \frac{n_t}{n_i}$. Beschouw nu een rechthoekige driehoek met rechthoekzijden $n_i$en n_t. Voor de ene scherpe hoek geldt dat de tangens gelijk is aan $\frac{n_t}{n_i}$, en voor de andere scherpe hoek is de tangens gelijk aaan $\frac{n_i}{n_t}$. Kortom die 2 hoeken zijn precies zo groot als de brewsterhoeken θ_q en θ_p en, zoals voor elke rechthoekige driehoek, samen zijn die twee hoeken 90°.

c

Die is elliptisch gepolariseerd.

d

Voor de ellipticiteit van de doorgelaten bundel geldt $e = t_s / t_p$ of $e = t_p / t_s$ als dat kleiner mocht blijken te zijn (zie het bijgevoegde schema).

Gewoon invullen geeft

$$e = \frac{t_s}{t_p} = \frac{n_t \mathrm{Cos}[\theta_i] + n_i \mathrm{Cos}[\theta_t]}{n_i \mathrm{Cos}[\theta_i] + n_t \mathrm{Cos}[\theta_t]}$$

Nu is het handig om te gebruiken dat r_p gelijk is aan 0 als θ_i gelijk is aan de brewsterhoek θ_p, dus de teller van de uitdrukking voor r_p is dan 0, dus $n_t \operatorname{Cos}[\theta_i] - n_i \operatorname{Cos}[\theta_t] = 0$, ofwel $\operatorname{Cos}[\theta_t] = \frac{n_t \operatorname{Cos}[\theta_i]}{n_i}$, tenminste als $\theta_i = \theta_p$. Vervolgens elinineer je $\operatorname{Cos}[\theta_t]$.

$$\mathbf{e} = \frac{n_t \operatorname{Cos}[\theta_i] + n_i \operatorname{Cos}[\theta_t]}{n_i \operatorname{Cos}[\theta_i] + n_t \operatorname{Cos}[\theta_t]} \;/.\; \operatorname{Cos}[\theta_t] \to \frac{n_t \operatorname{Cos}[\theta_i]}{n_i}$$

$$\frac{2 \operatorname{Cos}[\theta_i]\, n_t}{\operatorname{Cos}[\theta_i]\, n_i + \frac{\operatorname{Cos}[\theta_i]\, n_t^2}{n_i}}$$

De Cos[θ_i] kun je nu wegdelen uit teller en noemer, en zowel teller als noemer deel je nog eens door n_t en het gevraagde resultaat $e = \frac{2}{\frac{n_i}{n_t} + \frac{n_t}{n_i}}$ volgt.

Alternatief is om θ_i te vervangen door θ_p en θ_t door θ_q, en vervolgens de complementariteit te gebruiken $\operatorname{Cos}[\theta_q] = \operatorname{Sin}[90° - \theta_q] = \operatorname{Sin}[\theta_p]$, en tot slot Brewster's wet, dus

$$e = \frac{n_t \operatorname{Cos}[\theta_p] + n_i \operatorname{Cos}[\theta_q]}{n_i \operatorname{Cos}[\theta_p] + n_t \operatorname{Cos}[\theta_q]} =$$

$$\frac{n_t \operatorname{Cos}[\theta_p] + n_i \operatorname{Sin}[\theta_p]}{n_i \operatorname{Cos}[\theta_p] + n_t \operatorname{Sin}[\theta_p]} = \frac{n_t + n_i \operatorname{Tan}[\theta_p]}{n_i + n_t \operatorname{Tan}[\theta_p]} = \frac{n_t + n_i\,(n_t / n_i)}{n_i + n_t\,(n_t / n_i)} = \frac{2}{n_i / n_t + n_t / n_i}.$$