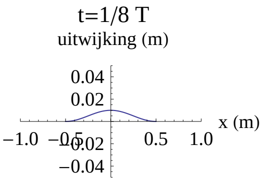
Tentamen Golven & *Optica* (NS-104B)

30 juni 2010, 3 uur

Uitwerkingen van opgave 1, 2 en 3. Opgave 4 volgt later.

Opgave 1: Golven op een koord (2.5 punt)

Antwoorden Opgave 1

a) 400 m/s
b) 100 Hz
c) $\frac{1}{2}\,\mu \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$
d) 0.2 J.   Ja.
e) Op t=T/8: 

op t=T/4: overal nul; op t=3T/8: draai puls van t=T/8 om; op t=T/2: draai puls van t=0 om.
f) Geen uitrekking, dus ook geen potentiële energie. Kinetische energie van linkerhelft is 0, van rechterhelft is het 2 E_k, ofwel 0.4J.
g) 3/2 E_k, ofwel 0.3J.

- **Gedetailleerde uitleg**

- **a)**

De golfsnelheid is 400 m/s. De spankracht is gegeven (400 N) en de massadachtheid is 5 gram per 2 meter ofwel 2.5 10^{-3} kg m^{-1}.

```
In[1]:= v = Sqrt[F / μ] /. {F → 400, μ → 2.5 × 10^-3}
Out[1]= 400.
```

- **b)**

De fundamentele frequentie van dit opgespannen koord is $\frac{v}{2L}$. De gevraagde frequentie is dus $\frac{400}{2\times 2} = 100$ Hz. Dat niet elk punt van het koord op een harmonische wijze trilt doet hier niet ter zake. Het is natuurlijk goed als wordt aangegeven dat het geluid ook een aantal boventonen bevat, maar de grondtoon is 100 Hz.

- **c)**

De massadichtheid μ= 2.5 10^{-3}kg/m. De kinetische energie wordt gegeven door de algemene formule

$$\frac{1}{2}\,\mu \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}\right)^2 dx,$$

waarin $y(x,\,t)$ de verticale uitwijking van het koord is.

d)

Met amplitude A en golfsnelheid v is de gevraagde uitdrukking:

$$y_L(x,\ t) = A \sin^2(\pi\,(x - v\,t)).$$

Hier mag de numerieke waarde $A = 0.01$ m en $v = 400$ m/s dus best zijn ingevuld.

In[2]:= $v =.$

$$E_{\text{kin},0} = \frac{1}{2}\,\mu \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial\left(A \sin^2(\pi\,(x - t\,v))\right)}{\partial t}\right)^2 dx$$

Out[3]= $\frac{1}{2} A^2 \pi^2 v^2 \mu$

In[4]:= `D[Sin[π (x - v t)]^2, t]^2`

Out[4]= `4 π^2 v^2 Cos[π (-t v + x)]^2 Sin[π (-t v + x)]^2`

Deze integraal is prima op papier uit te rekenen behalve de 1/2 μ en de A^2 komt er een factor $(\pi\,v)^2$, vanwege het partieel differentiëren naar t. En dan de factoren 2 en 1/2: die vallen uiteindelijk allemaal tegen elkaar weg.

In[5]:= $E_{\text{kin},0}$ /. $\{\mu \to 2.5 \times 10^{-3},\ A \to 0.01,\ v \to 400\}$

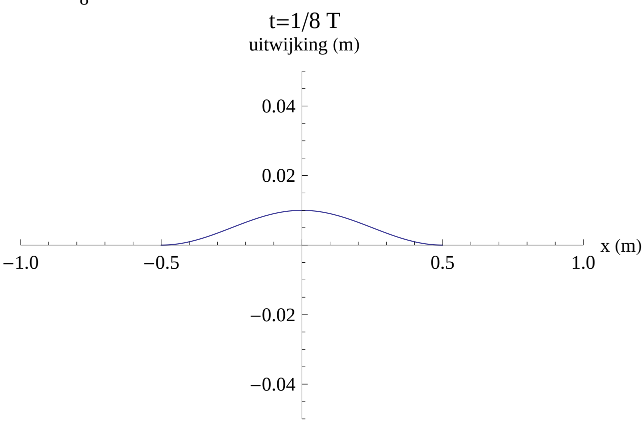
Out[5]= 0.197392

Dus 0.2 J is de gevraagde kinetische energie in het koord op $t = 0$. (Exact: $\frac{\pi^2}{50}$).

De linker en de rechterhelft hebben evenveel kinetische energie. Op $t = 0$ heeft elk punt $x \in [0,1]$, de rechterhelft, namelijk precies dezelfde verticale snelheid als het punt $x - 1$ dat ligt in [-1,1], de linkerhelft.

- **e)**

Op $t = \frac{T}{8}$ ziet het patroon er als volgt uit:



Op $t = \frac{T}{4}$ is de uitwijking overal nul, op $t = \frac{3\,T}{8}$ is de uitwijking -1 maal de uitwijking op $t = \frac{T}{8}$ en op $t = \frac{T}{2}$ wordt de uitwijking van het gegeven plaatje (de situatie op $t = 0$) van teken omgedraaid. Die schetsen zijn dus niet zo interessant.

- **f)**

Op $t = \frac{T}{4}$ is de rechterpuls volledig gereflecteerd en dus van teken omgedraaid. De linker puls is op de plaats aangekomen waar de rechter op $t = 0$ was, en samen geven ze dus een uitwijking van 0 (dit geldt voor de rechterhelft); maar ook de linkerhelft van het koord heeft geen uitwijking en staat ook nog eens stil; bij $x = -1$ is namelijk (nog) geen inkomende golf aangekomen die daar zal reflecteren; de "kop" van de naar linkslopende golf bevindt zich dan pas in $x = 0$.
Het koord is dus nergens uitgerekt/vervormd vergeleken met de evenwichtssituatie (=een opgespannen koord zonder uitwijking). Vandaar dat de potentiële elastische energie 0 is.

Op $t = \frac{T}{4}$ is de verticale snelheid in de rechterhelft van het koord 2 maal zo groot als op $t = 0$. In die rechterhelft zit dus 4 maal zoveel kinetische energie als op $t = 0$. De linkerhelft staat stil en heeft dus geen kinetische energie. Dus $E_{\text{kin},\,T/4} = 2 * E_{\text{kin},\,0}$.
Het gevraagde antwoord is daarom: De kinetische energie op $t = \frac{T}{4}$ is $2\,E_k$, dit is ongeveer 0.4 J. (Exact: $\frac{\pi^2}{25}$)

- **g)**

De kinetische energie op $t = \frac{T}{4}$ is dus verdubbeld vergeleken met die op $t = 0$. Er is op $t = \frac{T}{4}$ geen potentiële energie, dus de totale energie is $E_{\text{tot}} = 2E_{\text{kin},\,0}$.
Op $t = \frac{T}{8}$ is er van de oorspronkelijke twee pulsen die er op $t = 0$ waren nog maar 1 over. De potentiële energie is daar dus gehalveerd. Op $t = 0$ zijn de kinetische en potentiële energie elk de helft van de totale energie. Op $t = \frac{T}{8}$ is dus $\frac{3}{4}$ van de totale energie kinetische energie: $E_{\text{kin},3/8\,T} = 3/4\,E_{\text{tot}} = 3/2\,E_{\text{kin},\,0}$.
Het gevraagde antwoord is daarom: De kinetische energie op $t = \frac{T}{8}$ is $\frac{3}{2}\,E_k$, dit is ongeveer 0.3 J. (Exact: $\frac{3\,\pi^2}{100}$)

Opgave 2: Geluidsintensiteit (2.5 punt)

Antwoorden opgave 2

a) 344 m/s
b) 12.56 mW
c) 4.5 Pa
d) $\omega = 2\pi$*440 s^{-1}, en $A = 4 * 10^{-6}$m.
e) 77 dB
f) Het geluidsniveau verandert niet.

- **Gedetailleerde uitleg**

- **a)**

```
In[6]:=  v = Sqrt[B / ρ] /. {B → 1.42 × 10^5, ρ → 1.2}
Out[6]=  343.996
```

Dus v = 344 m/s.

- **b)**

70 dB= 10^{-5} W m^{-2}. Oppervlak bol met straal 10 m is $4\,\pi\,10^{\,2}$ m^2. Het uitgezonden vermogen is dus 12.56 mW.

- **c)**

De intensiteit op r=0.2 m is 50^2= 2500 maal zo hoog als op r=10 m. Dus 2500 * 10^{-5}= 2.5 10^{-2} W m^{-2}.

```
In[7]:= pmax = Sqrt[2 intensiteit ρ v] /. {intensiteit → 2.5 × 10^-2, ρ → 1.2, v → 344}
Out[7]= 4.5431
```

De gevraagde drukamplitude is dus 4.5 Pa.

- **d)**

```
In[8]:= ω = 2 π f /. f → 440
Out[8]= 880 π
```

De hoekfrequentie ω is 2π * 440 s^{-1}.

```
In[9]:= A = (pmax v)/(B ω) /. {pmax → 4.5, B → 1.42 × 10^5, v → 344}
Out[9]= 3.98093 × 10^-6
```

De verplaatsingsamplitude is 4 * 10^{-6}m.

- **e)**

Interferentie speelt hier geen enkele rol! Er zijn eigenlijk 2 geluidsbronnen. Het vermogen (of de intensiteit) van de bron met "2ω" is 4 maal zo groot als van de "ω" bron. Waarom? $p_{max} = A\ B\, k$;
B verandert niet, A ook niet, maar k wordt wel 2 keer zo groot. p_{max} wordt dus ook 2 keer zo groot. De intensiteit I van die tweede bron is evenredig met p_{max}^2, en is dus 4 maal zo groot als van de eerste bron.
Het totale vermogen (van beide bronnen samen) is dus 4+1=5 maal zo groot als van de "ω" bron alleen, ofwel er komt $10 \log_{10}(5) = 7$ dB bij het geluidsniveau, dat dus stijgt tot 77 dB.

- **f)**

Het geluidsniveau verandert niet; dus ook nu is het 77 dB.

Opgave 3: Interferentie dubbelspleet (2.5 punt)

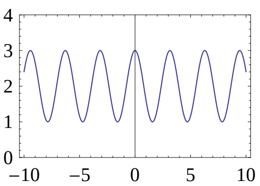
Antwoorden opgave 3

a) $y = m\,\frac{D\lambda}{d}$

b) m is het grootste gehele getal waarvoor geldt $m < \frac{d}{\lambda}$.

c) $I = 4\, I_0 \left(\frac{\text{Sin}[\kappa\, a]}{(\kappa\, a)}\right)^2 * \text{Cos}[\kappa\, d]^2$ met κ=$\frac{\pi\, y}{D\lambda}$.

d)Verschuiving minima is $\frac{d\, D(n-1)}{b}$, maar sommige minima, n.l. de nulpunten van Sin[κ a]/κ, blijven gewoon liggen.

e) 

f) Intensiteit maxima: 3 I_0. Intensiteit minima: I_0.

Gedetailleerde uitleg

a)

Maxima op schern ontstaan als $d \sin(\theta) = m\,\lambda$, dus als $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\,\lambda}{d}\right)$. We weten ook dat $\tan(\theta) = \frac{y}{D}$.

Maxima op het scherm zijn dus te vinden op posities $y = D \tan(\theta)$, waarin $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\,\lambda}{d}\right)$, en m een geheel getal is.

Met de kleine hoek benadering wordt dit natuurlijk $y = m\,\frac{D\,\lambda}{d}$. Dit is formule 35.6 die ook op het formuleblad staat.

b)

In de uitdrukking, $d \sin(\theta) = m\,\lambda$, kan $\sin(\theta)$ maximaal 1 zijn, dus $m < \frac{d}{\lambda}$. De hoogst orde die kan worden waargenomen is dus $m = \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor$.

c)

De gevraagde uitdrukking is het product van het diffractiepatroon van één enkele spleet met eindige breedte a, en een dubbelspleet met verwaarloosbare spleetbreedte, en spleetafstand b. Je kunt natuurlijk alles invullen. Dan krijg je:

$$I = I_0 \left(\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi\, a\, \mathrm{Sin}[\theta]}{\lambda}\right]}{\frac{(\pi\, a\, \mathrm{Sin}[\theta])}{\lambda}} \right)^2 * \left(\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{2\,\pi\, d\, \mathrm{Sin}[\theta]}{\lambda}\right]}{\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi\, d\, \mathrm{Sin}[\theta]}{\lambda}\right]} \right)^2$$

Het kan natuurlijk wel eenvoudiger worden geschreven: met bijv. de parameter $\kappa = \pi\,\mathrm{Sin}[\theta]/\lambda$, dit is ook een maat voor de positie op het scherm, wordt de uitdrukking een stuk korter:

$$I = I_0 \left(\frac{\mathrm{Sin}[\kappa\, a]}{(\kappa\, a)} \right)^2 * \left(\frac{\mathrm{Sin}[2\,\kappa\, d]}{\mathrm{Sin}[\kappa\, d]} \right)^2$$

Deze uitdrukking kan verder worden vereenvoudigd tot

$$I = 4\, I_0 \left(\frac{\mathrm{Sin}[\kappa\, a]}{(\kappa\, a)} \right)^2 * \mathrm{Cos}[\kappa\, d]^2.$$

In de kleine hoek benadering geldt dat $\kappa = \frac{\pi\,\mathrm{Sin}[\theta]}{\lambda} \approx \frac{\pi\, y}{D\,\lambda}$.

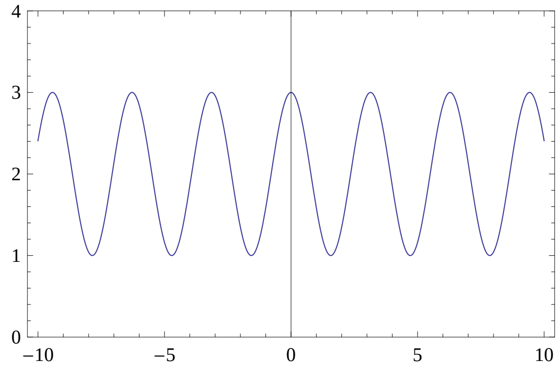
d)

Door zo'n glasplaatje passen $\frac{d\,n}{\lambda}$ golven van het bedoelde licht, terwijl er in een plaatje lucht $\frac{d}{\lambda}$ golven in passen. Het opgelopen extra faseverschil is daarom $\frac{2\,\pi\, d\,(n-1)}{\lambda}$. Door afbuiging onder een hoek θ= y/D ontstaat een weglengteverschil van b θ, ofwel een faseverschil van $\frac{2\,\pi\, b\,\theta}{\lambda}$. Dus als $\frac{2\,\pi\, b\, y}{\lambda\, D} + \frac{2\,\pi\, d\,(n-1)}{\lambda} = 2\,\pi\, m$, ontstaat een maximum. Ofwel $y = \frac{D\, m\,\lambda}{b} - \frac{d\, D\,(n-1)}{b}$.

Het Cos^2 patroon uit vraag c) blijft dus hetzelfde, alleen verschuift alles over een afstand $\frac{d\, D\,(n-1)}{b}$. Dus ook de minima in het Cos^2 patroon verschuiven over die afstand. In de praktijk zie je veel kleinere verschuivingen omdat het verwisselen van maxima en minima de grootste "verschuiving" is.
Maar de minima (=nulpunten) van $\frac{\sin(\kappa\, a)}{\kappa\, a}$ blijven onderanderd liggen. Als een diffractie patroon van één spleet ergens (is onder een bepaalde hoek) een minimum heeft, dan heeft elke spleet die even breed is ook een minimum onder die hoek. De fase van het opvallende licht, ook al gaat het eerst door een plaatje doet er niet toe. En als één spleet ergens geen intensiteit geeft, de ander geeft daar ook geen intensiteit, dan geeft de combinatie van 2 spleten ook niets!

- **e)**

De amplitude in de oorspronkelijke polarisatierichting is $\frac{\sqrt{3}}{2}$ maal E_0. En de golven zijn in fase op de 2 spleten.
Daarom krijgen we het Cos^2 patroon dat in vraag c) zonder de $\frac{\sin(\kappa\, a)}{\kappa\, a}$ term van de eindige breedte, maar wel met een exta factor $\frac{3}{4}$ voor de intensiteit.
De amplitude loodrecht op de oorspronkelijke polarisatie richting is 1/2 E_0. Maar deze golven hebben op de spleten een faseverschil van π. Hierdoor verandert het Cos^2 patroon in een Sin^2 patroon, met een extra factor 1/4 voor de intensiteit.
De gevraagde schets is derhalve de som van een Cos^2 en een Sin^2 patroon, maar omdat de Cos^2 een 3 maal zo grote coëfficiënt heeft, krijg je eigenlijk een Cos^2 met daaronder een constante achtergrond. Dus zoiets als:



Bij θ=0 (of y=0) zit nog wel een maximum, het lijkt dus gewoon weer een Cos^2 patroon maar de minima nu niet meer gelijk aan 0!

- **f)**

Zoals in het vorige punt al uitgelegd: De maxima hebben een intensiteit van $3/4 * 4\, I_0 = 3\, I_0$, en de minima een intensiteit van $1/4 * 4\, I_0 = I_0$, waarbij I_0 de intensiteit van één oneindig smalle plaat is. De geeft dus een constant diffractie patroon (onafhankelijk van θ of y. Energiegebehoud verltelt dat de gemiddelde intensiteit 2 I_0 moet zijn, en dat is inderdaad het geval.