

# Tentamen Golven en Optica

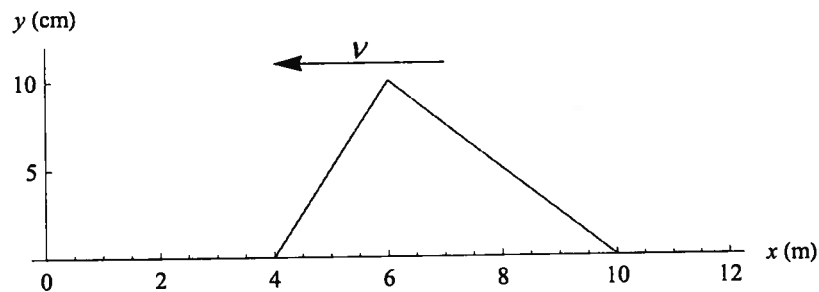
(NS-104B)

woensdag 27 juni 2012, 15.00-18.00 uur

- Maak elke opgave op een **apart** vel voorzien van uw naam en studentnummer.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de 4 opgaven; elk onderdeel weegt even zwaar.

## Opgave 1. Puls op een koord (2.5 punten)

We beschouwen een driehoekige puls  $y(x, t)$  die met snelheid  $v$  over een ideaal koord (spankracht  $F$ , massa per lengte-eenheid  $\mu$ ) in de negatieve  $x$ -richting loopt. Er is geen wrijving. Het koord is op  $x = 0$  m verbonden met een vaste wand. Een momentopname op tijdstip  $t = 0$  s is weergegeven in de figuur. Gegeven:  $F = 100$  N,  $\mu = 0.01$  kg/m.



De 3 punten waar een knik in het koord 'lijkt' te zitten hoeft u niet te apart te beschouwen. U mag aannemen dat de tweede afgeleide van de getekende functie overal netjes gedefinieerd is.

- Met welke snelheid verplaatst deze golf zich naar links?
- Teken nauwkeurig de puls op het tijdstip dat de achterkant van de puls 7 meter naar links is gereisd.

De kinetische energie per lengte-eenheid  $u_k(x, t)$  wordt gegeven door  $u_k(x, t) = \frac{1}{2} \mu v_y(x, t)^2$ , waarin  $v_y(x, t)$  de transversale snelheid van het punt  $x$  op het koord is.

- Bereken de kinetische energie in de puls op  $t = 0$  s.

De potentiële energie per lengte-eenheid  $u_p(x, t)$  wordt gegeven door:

$$u_p(x, t) = \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2.$$

- Bereken de potentiële energie op  $t = 0$  s en laat zien dat de totale energie in de puls gelijk is aan 0.75 J.
- Beredeneer, dus zonder uitgebreide berekening, dat de kinetische energie in de puls op het tijdstip zoals bedoeld in (b) gelijk is aan driekwart van 0.75 J.

*Hint: Kijk goed naar de vorm van het koord op dat tijdstip.*

## Opgave 2. Laserbundels en het EM-veld (2.5 punten)

Een gepolariseerde laserbundel heeft een gemiddelde intensiteit van  $10 \text{ W/m}^2$ , is gericht in de richting van de positieve  $x$ -as, en is gepolariseerd in de  $y$ -richting.

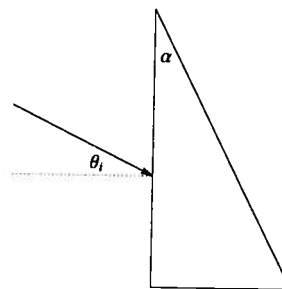
- Geef de amplitude (in de juiste SI-eenheid) van het elektrische veld in de laserbundel. De waarde van de lichtsnelheid  $c$  is  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$  en de permeabiliteit van vacuüm  $\mu_0$  is  $4\pi \times 10^{-7} \text{ V.s/(A.m)}$ .
- Geef de amplitude (in de juiste SI-eenheid) van het magnetische veld in de laserbundel.
- Schets in één figuur zowel het elektrische veld als het magnetische veld in de bundel. Geef duidelijk aan in welke richting het licht reist.

Het EM-veld in een laserbuis die de bovengenoemde bundel produceert is een staande golf. Aangenomen mag worden dat het licht in de laserbuis ook gepolariseerd is in de  $y$ -richting.

- Als de buis 30 cm lang is en de golflengte van het licht in de buis 600 nm is, hoeveel buiken (exact!) telt het elektrische veld dan? En het magnetische veld?
- Schets het elektrische veld in de laserbuis op een tijdstip waarop (in een buik) de maximale veldsterkte bereikt wordt. De waarde van die maximale veldsterkte hoeft u niet aan te geven. Schets op hetzelfde tijdstip ook het magnetische veld. Geef duidelijk aan wat er langs de assen in uw schetsen staat uitgezet.

## Opgave 3. Breking (2.5 punten)

Een glazen prisma heeft een tophoek van  $\alpha$  en een brekingsindex  $n$ . De brekingsindex buiten het prisma is gelijk aan 1. Een circulair gepolariseerde lichtbundel met golflengte 500 nm valt vanaf de linker kant op het glas onder een hoek  $\theta_i$  met de normaal, zie figuur. De hoek van de doorgaande bundel met deze normaal noemen we  $\theta_t$ .



- Welke waarde heeft de *golflengte* van het licht in het prisma? Welke *frequentie* heeft het licht dan?
- We laten het licht invallen op het prisma onder de Brewsterhoek  $\theta_p$  (dus  $\theta_i = \theta_p$ , zie figuur). Geef in een figuur de polarisatietoestand en/of polarisatierichting van het gereflecteerde licht aan. (Duidelijk omschrijven mag ook.)
- Wat kunt u zeggen over de polarisatietoestand en/of polarisatierichting van de gebroken lichtbundel?
- De Brewsterhoek voor licht dat **vanuit** het prisma op een grensvlak valt noemen we  $\theta_{p'}$ . Laat zien, door gebruik te maken van Brewster's wet, dat de twee Brewsterhoeken  $\theta_p$  en  $\theta_{p'}$  complementair zijn, d.w.z.  $\theta_p + \theta_{p'} = 90^\circ$ .

We laten het licht wederom onder de Brewsterhoek  $\theta_p$  invallen op de linkerzijde van het prisma. Zolang de tophoek klein genoeg is kan de lichtbundel het prisma aan de schuine zijde verlaten. Op zeker moment wordt de tophoek te groot en treedt er aan de schuine zijde totale interne reflectie op. De brekingsindex  $n$  van het prisma is gelijk aan 1.5.

- Voor welke waarden van  $\alpha$  treedt er totale interne reflectie op van dit licht aan de schuine zijde? Heeft u geen rekenmachine bij u? De algemene formule als functie van  $n$  is ook prima!

*Hint: Druk  $\alpha$  uit in  $\theta_p$  en in de hoek van inval op de schuine zijde.*

## Opgave 4. Diffractie (2.5 punten)

We beschouwen een spleetsysteem opgebouwd uit spleten met spleetbreedte  $a$  en afstand  $d$  ( $d \geq 2a$ ) tussen de middens van de spleten. Het systeem wordt beschenen met een loodrecht invallende, monochromatische, vlakke lichtgolf. De intensiteit van het Fraunhofer diffractiepatroon op een scherm op grote afstand achter de spleten wordt gegeven door

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \left( \frac{\sin(3\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \right)^2,$$

met  $\beta = ka \sin(\theta)$ ,  $\alpha = kd \sin(\theta)$ ,  $k$  is het golfgetal en  $\theta$  is de diffractiehoek.

- Hoeveel minima zijn er zichtbaar tussen het centrale (nulde orde) hoofdmaximum en het eerste orde hoofdmaximum? Onder welke hoek (ongeveer) verwacht u het eerste orde hoofdmaximum?
- Hoe hoog is de intensiteit van het centrale hoofdmaximum? Laat aan de hand van bovenstaande formule zien waarom het eerste orde hoofdmaximum een kleinere intensiteit zal hebben dan het centrale hoofdmaximum.

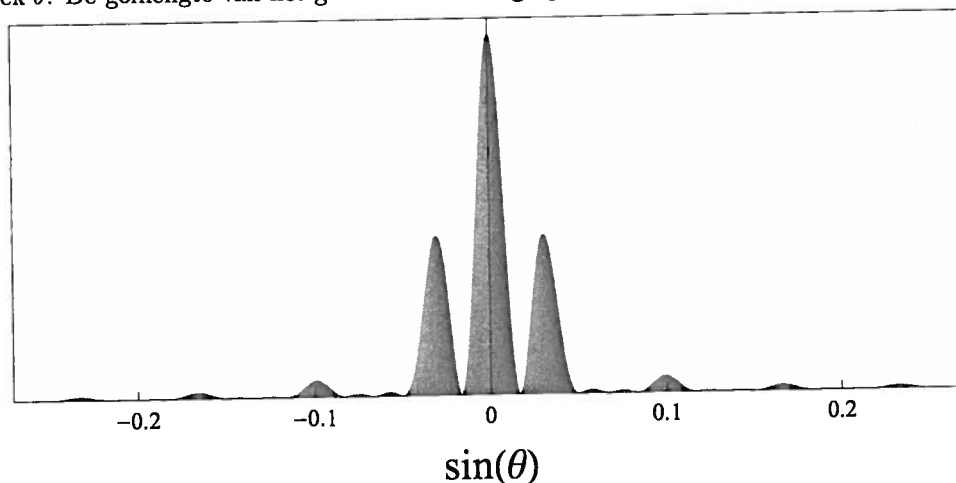
De spleten worden onder een kleine hoek t.o.v. de normaal beschenen met een monochromatische en coherente vlakke golf. Doordat de golf niet loodrecht op het tralie invalt, bestaat er tussen twee opeenvolgende spleten een faseverschil  $\delta$ . De hoeken waaronder de hoofdmaxima op een scherm op grote afstand worden waargenomen, zijn daardoor verschoven over een hoek  $\Delta\theta$  vergeleken bij loodrechte inval.

- Laat zien dat de waargenomen hoekverschuiving  $\Delta\theta$  voor kleine diffractiehoeken gegeven wordt door

$$|\Delta\theta| = \left| \frac{\delta}{kd} \right|.$$

- Het vijfde orde hoofdmaximum aan beide zijden van het nulde orde hoofdmaximum blijkt op het scherm afwezig te zijn. Bereken de spleetbreedte  $a$  uitgedrukt in de afstand tussen de spleten  $d$ .

Op een scherm is het volgende (theoretische) Fraunhofer diffractiepatroon zichtbaar. Langs de  $y$ -as staat de intensiteit lineair uitgezet en langs de  $x$ -as staat de sinus van de diffractiehoek  $\theta$ . De golflengte van het gebruikte licht is gelijk aan 600 nm.



- Door hoeveel spleten is dit patroon veroorzaakt? Wat kunt u zeggen over de spleetbreedte  $a$  en de afstand  $d$  tussen de middens van de spleten?

lege pagina

# Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

## Hoofdstuk 15

- 15.1)  $v = \lambda f$
- 15.5)  $k = 2\pi/\lambda$  en  $\omega = 2\pi f$
- 15.6)  $\omega = vk$
- 15.7)  $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , sinusvormige golf in de  $+x$ -richting.
- 15.12)  $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$ , de golfvergelijking.
- 15.13)  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ , voor golven op een koord met spankracht  $F$  en massa per lengte eenheid  $\mu$ .
- 15.xx)  $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi)$ , algemene vorm voor lopende harmonische golven met amplitude  $A$  (in één dimensie); de willekeurige fase  $\phi$  wordt vaak weggelaten.
- 15.21)  $P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$ , vermogen van een golf.
- 15.25)  $P_{av} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$ , gemiddeld vermogen van sinusvormige golf.
- 15.26)  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ , intensiteit is evenredig met kwadraat van de inverse afstand.
- 15.27)  $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ , superpositieprincipe.
- 15.28)  $y(x, t) = A_{sw} \sin(kx) \sin(\omega t)$ , staande golven op een koord, gefixeerd in  $x = 0$ .
- 15.33)  $f_n = n \frac{v}{2L}$ , frequenties staande golven op koord gefixeerd in  $x = 0$  en  $x = L$ .
- a)  $f_1$ , grondtoon, fundamental frequency
  - b)  $f_2$ , eerste boventoon, second harmonic
  - c)  $f_n$ ,  $(n - 1)$ de boventoon,  $n^{\text{th}}$  harmonic

## Hoofdstuk 16

- 16.3)  $p(x, t) = -B \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ , drukfluctuatie door gradiënt van de deeltjesverplaatsing in een geluidsgolf.
- 16.5)  $p_{\max} = BkA$ , drukamplitude voor sinusvormige geluidsgolven; met  $B$  the bulk modulus en  $A$  de verplaatsingsamplitude.
- 16.7)  $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ , geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven.
- 16.8)  $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ , geluidssnelheid in een ideaal gas; met  $\gamma$  de verhouding van warmtecapaciteit bij constante druk en die bij constant volume,  $R$  de gasconstante,  $T$  de temperatuur in K, en  $M$  de molaire massa.
- 16.9)  $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ , geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven in een vaste staaf, met  $Y$  de Young modulus.
- 16.14)  $I = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2 = \frac{p_{\max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{\max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$ , intensiteit (in  $\text{W}/\text{m}^2$ ) van een sinusvormige geluidsgolf.

- 16.15)  $\beta = (10 \text{ dB})^{10} \log \frac{I}{I_0}$ , definitie van het geluidsniveau in decibel, met  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ .
- 16.16)  $f_n = \frac{nv}{2L}$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), frequenties van staande golven in een pijp met lengte  $L$  die aan beide kanten open is.
- 16.22)  $f_n = \frac{nv}{4L}$ , ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ), frequenties van staande golven in een pijp met lengte  $L$  die aan één kant open en aan de andere kant afgesloten is.
- 16.24)  $f_{\text{beat}} = |f_a - f_b|$ , beat frequentie van twee signalen met een klein onderling frequentieverschil.
- 16.29)  $f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S} f_S$ , Doppler effect;  $v_L$  en  $v_S$  zijn relatief t.o.v. een medium dat geluidssnelheid  $v$  heeft. Let op de tekens van  $v_L$  en  $v_S$ !!
- 16.30)  $\sin(\alpha) = \frac{v}{v_S}$ , hoek van schokgolf (deze heeft de vorm van een kegel) als de geluidsbron met snelheid  $v_S > v$  door een medium met geluidssnelheid  $v$  reist.

## Hoofdstuk 32

- 32.4)  $E = cB$  in vacuüm.
- 32.5)  $B = \epsilon_0 \mu_0 c E$
- 32.6)  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , lichtsnelheid in vacuüm.
- 32.17)  $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$ ,  $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{e}_z B_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$ , sinusvormige vlakke electromagnetische golf in de  $+x$ -richting,  $\vec{e}_{y(z)}$  is de eenheidsvector in de  $y(z)$ -richting en  $E_{\text{max}} = c B_{\text{max}}$ .
- 32.20)  $E = vB$  en  $B = \epsilon \mu v E$  in diëlectricum
- 32.21)  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ , snelheid electromagnetische golf in een diëlectricum met permittiviteit  $\epsilon = K \epsilon_0$  en permeabiliteit  $\mu = K_m \mu_0$
- 32.22)  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{K K_m}$ , brekingsindex. De relatieve permeabiliteit  $K_m$  is meestal ongeveer gelijk aan 1.
- 32.28)  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ , Poynting vector.
- 32.29)  $I = S_{\text{av}} = \frac{E_{\text{max}} B_{\text{max}}}{2 \mu_0} = \frac{E_{\text{max}}^2}{2 \mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{max}}^2$ , intensiteit van een sinusvormige golf in vacuüm, in  $\text{W/m}^2$ , stroomsnelheid van energie.
- 32.31)  $\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$ , stroomsnelheid van impuls (momentum).
- 32.32)  $p_{\text{rad}} = \frac{S_{\text{av}}}{c}$ , stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt geabsorbeerd.
- 32.33)  $p_{\text{rad}} = \frac{2S_{\text{av}}}{c}$ , stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt gereflecteerd.
- 32.36) Staande golven. Bij reflectie van een e.m. golf in  $x = 0$  aan een perfecte geleider heeft het  $\vec{E}$ -veld een knoop in  $x = 0$ , en ook als  $x = n\lambda/2$  met ( $n = 1, 2, \dots$ ); de knopen in het  $\vec{B}$ -veld zijn  $\lambda/4$  verschoven.
- 32.xx) Dispersie relatie:  $\omega$  als functie van  $k$ . Fasesnelheid  $v_f(k) = \omega/k$ . Groepsnelheid  $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$ .

## Hoofdstuk 33

- 33.2)  $\theta_r = \theta_i$ , hoek van reflectie is hoek van inval.
- 33.4)  $n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b)$ , wet van Snellius.
- 33.5)  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ , golflengte in een medium met brekingsindex  $n$ .
- 33.6)  $\sin(\theta_{\text{crit}}) = \frac{n_a}{n_b}$ , de kritische hoek.
- 33.7)  $I = I_{\text{max}} \cos^2(\phi)$ , Wet van Malus, polarisatie van gepolariseerd licht;  $\phi$  is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.
- 33.8) Brewster's wet:  $\tan(\theta_p) = \frac{n_a}{n_b}$ ;  $\theta_p$  is de Brewster hoek. De reflectiecoëfficiënt voor invallend licht dat 100% gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval en reflectie is bij deze hoek gelijk aan 0.
- 33.x)  $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t) \pm \vec{e}_z E_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)$ , circulair gepolariseerde vlakke golf die loopt in de  $+x$ -richting. Met het plusteken is de golf rechtsdraaiend indien u de golf tegemoet kijkt. De lengte van  $\vec{E}$  is altijd  $E_{\text{max}}$ .
- 33.y) Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit:  $R_{\perp} = \sin^2(\theta_t - \theta_i) / \sin^2(\theta_t + \theta_i)$ , en  $R_{\parallel} = \tan^2(\theta_t - \theta_i) / \tan^2(\theta_t + \theta_i)$ . Voor loodrechte inval ( $\theta_i = 0$ ) reduceren deze uitdrukkingen tot  $R = (n_2 - n_1)^2 / (n_2 + n_1)^2$ .

## Hoofdstuk 35

- 35.4)  $d \sin(\theta) = m\lambda$  met  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , constructieve interferentie als verschil in weglengte een geheel aantal golflengtes is. De afstand tussen 2 spleten is  $d$
- 35.4)  $d \sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda$  met  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , destructieve interferentie als verschil in weglengte een half-talig aantal golflengtes is.
- 35.6)  $y_m = m \frac{R\lambda}{d}$ , positie van maxima in Young's experiment;  $R$  is de afstand tussen spleten en scherm,  $d$  is de afstand tussen de twee spleten.  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .
- 35.7)  $E_P = 2E \cos(\frac{\phi}{2})$ , amplitude. Superpositie van 2 sinusvormige golven met gelijke amplitude en onderling faseverschil  $\phi$ .
- 35.11)  $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$ , faseverschil  $\phi$  is evenredig met verschil in weglengte.
- 35.14)  $I = I_0 \cos^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)$ , intensiteitspatroon van 2 oneindig smalle spleten in de Fraunhofer benadering.

## Hoofdstuk 36

- 36.2)  $\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$  met  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , minima voor diffractie aan één spleet met breedte  $a$ .
- 36.7)  $I = I_0 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$  met  $x = \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$ , intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte  $a$ .
- 36.xx)  $I = I_0 \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2$  met  $x = \frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$ , intensiteitspatroon van diffractie aan  $n$  spleten met onderlinge afstand  $d$  en verwaarloosbare breedte.
- 36.13)  $\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$  met  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand  $d$ .
- 36.15)  $R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = Nm$ , spectraal scheidend vermogen.

- 36.16)  $\sin \theta = m \frac{\lambda}{2d}$  met  $m = 1, 2, 3, \dots$ , Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand  $d$ . De hoek  $\theta$  is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.
- 36.17)  $\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter  $D$  het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.

## Goniometrie

- $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$
- $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a)$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$



kladpapier

kladpapier