Tentamen Golven en Optica

Uitwerkingen

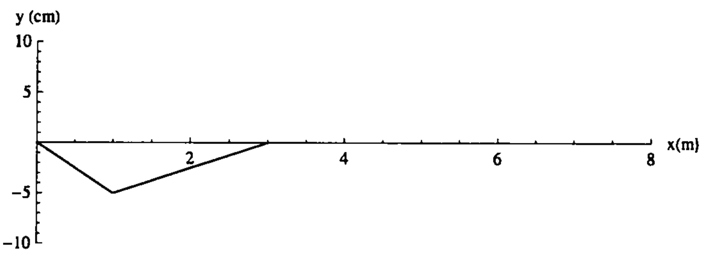
27 juni 2012

Opgave 1

- **1 a**

  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ =100 m/s.

- **1b**



- **1c**

  Op t=0 hebben allen punten x∈[4,6] een vericale snelheid die omhoog is gericht. Die snelheid is 10cm in 0.02 s, ofwel 5 m/s. De massa van die 2m koord is 0.02 kg, dus dat stuk heeft een kinetische energie van 1/2*0.02 * 5^2 = 0.25 J.

  Op t=0 hebben allen punten x∈[6,10] een vericale snelheid die omlaag is gerircht. Die snelheid is 10cm in 0.04 s, ofwel 2.5 m/s. De massa van die 4m koord is 0.04 kg, dus dat stuk heeft een kinetische energie van 1/2* 0.04 * 2.5^2 = 0.125 J.

  Het hele koord heeft dus een kinetische energie van 0.375 J.

- **1d**

  Eigenlijk overbodig om te rekenen, want in een lopende golf zit altijd evenveel kinetische als poteniële energie.
  Rekenen we toch, dan is op *t*=0 de helling 10cm/2m = 1/20 tussen 4 en 6 meter en -1/40 tussen 6 en 10 meter.
  De potentiële energie is dus:
  1/2 *100 * (2 * (1/20)^2 + 4 * (-1/40)^2) = 50 *(1/200+1/400)= 1/4 + 1/8 = 0.375 J

- **1e**

  Als het koord eruit ziet als in 1b, dan heeft het precies dezelfde vorm, met dus ook dezelfde helling, als de puls op *t*=0, alleen het teken is omgedraaid EN de lengte is maar half zo groot (3m in plaats van 6m). Daarom zit er in de puls maar de helft van de potentiële energie die er op *t*=0 in zat: 0.375/2 J . Dus de potentiële energie is dan 1/4 van de totale energie op *t*=0.
  Omdat de totale energie behouden is moet de kinetische energie op dat tijdstip (dat is trouwens op *t*=0.07 s) wel 3/4 van de totale energie zijn, dus 3/4 * 0.75 J.

Opgave 2

- **2a**

  $I = E_{max}^2/(2\,\mu_0\,c)$

  Dus E_{max} is de wortel uit $2\,\mu_0\,c\,I = 2 * 4\pi * 10^{-7} * 3 * 10^8 * 10 = 2400\,\pi$.

  Dus $E_{max} = 87$ V/m.

In[2]:=
```
emax = 2400. π // Sqrt
```

Out[2]=
```
86.8322
```

- **1b**

  $B_{max} = E_{max} / c = 2.9\;10^{-7}\,T = 2.9 \times 10^{-7}\,V * s \,/\, m^2$

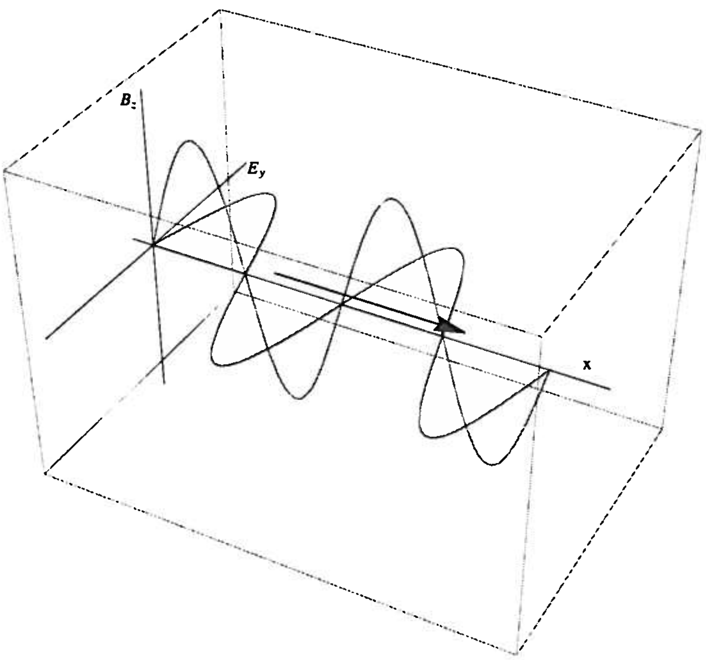
In[3]:=
```
c = 3 × 10^8;
bmax = emax / c
```

Out[4]=
```
2.89441 × 10^-7
```

- **2c**

  E-veld is een sinus in de y-richting (het xy-vlak),
  B-veld is precies zo'n sinus in de z-richting (het xz-vlak).
  Er moet een pijl of zoiets zijn die wijst naar rechts langs de x-as.
  De x-as heet "x" of iets dergelijks.
  De y-as heet "y" of "E_y" of E-veld.
  De z-as heet "z" of "B_z" of B-veld.
  De assen moeten in ieder geval benoemd zijn, en er moet duidelijk worden gemaakt dat het B-veld in de z-richting is. Onderstaand plotje zou prima zijn.

Out[5]=



- **2d**

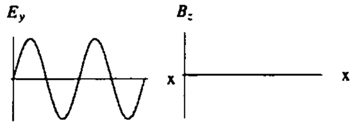
  Golflengte 600 nm. Knopen op het eind, en verder elke halve λ, tenminste voor het E-veld, en buiken er tussenin.
  E-veld heeft 2 * 30 cm / 600 nm = 1 miljoen buiken.
  B-veld heeft buiken aan de randen en dat is er dus 1 meer: 1000001. De eindstukken van de laserbuis horen er dus gewoon bij. Dus 999999 is niet goed, en 1 miljoen ook niet.

```
2 × 30 × 10^-2 / (600 × 10^-9) (* opletten op de factoren 10 !! *)
```

```
1 000 000
```

- **2e**

Schtesen is eigenlijk overbodig. Het B-veld in een staande EM-golf is 0 op het tijdstip dat het E-veld zijn maximum bereikt. Dat E-veld is een gewone sinus als functie van de plaats. (Het tekenen van 500000 sinussen is wat veel van het goede, dus elk plaatje met een sinus als functie van de plaats is in principe goed, maar het tweede plaatje moet dus leeg zijn. Of er moet iets over gezegd worden.)



Opgave 3

- **3a**

Golflengte in prisma is $500/n$ nm.
Frequentie in prisma is natuurlijk nog steeds $f=c/\lambda = 3\ 10^8\ /\ (500\ 10^{-9}) = 0.6\ 10^{15}$Hz

- **3b**

Gereflecteerd licht is lineair gepolariseerd. De polarisatierichting is loodrecht op het papier, dus loodrecht op het vlak van een invallende, gereflecteerde en gebroken lichtstraal.

- **3c**

De gebroken lichtbundel is elliptisch gepolariseerd.

De component loodrecht op het vlak van papier zal wat kleiner zijn dan de component in het vlak van het papier die loodrecht op de gebroken lichtstraal staat, maar zulke details hoef je niet te geven.

- **3d**

$\tan(\theta_p) = n$, $\tan\theta_{p'} = 1/n$, Samen zijn die 2 hoeken **dus** 90 graden.

Bewijs: Teken rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 en n; de 2 niet rechte hoeken hebben als tangens n en $1/n$, en die 2 hoeken zijn samen 90 graden, omdat de derde hoek van een rechthoekige driehoek per definitie 90 graden is, en de 3 hoeken van een driehoek samen altijd 180 graden zijn.

- **3e**

Teken de gebroken straal, die maakt een hoek $\theta_{p'}$ met de normaal van de linkerzijde van het prisma, je hoeft dus niet nog eens Snellius te gebruiken om die hoek uit te rekenen. Die gebroken straal maakt een hoek van inval die we θ_r noemen met de schuine zijde.
Dan zie je direct dat $\alpha + 90° + \theta_{p'} + (90° - \theta_r) = 180°$. Dus $\alpha = \theta_r - \theta_{p'}$.

Nu Snellius: Bij volledige interne reflectie geldt $\theta_r >= \sin^{-1}(\frac{1}{n})$. $\theta_{p'} = \tan^{-1}(\frac{1}{n})$

Dus α moet groter of gelijk zijn dan arcsin($1/n$)-arctan($1/n$).
Invullen dat n=1.5 geeft het resultaat $\alpha > 8.12°$.

```
180 / π * (ArcSin[1 / 1.5] - ArcTan[1 / 1.5])
```

```
8.12025
```

Opgave 4

4a

2 minima. De hoofd- en nevenmaxima worden beschreven door de term met de α's. Er zijn overduidelijk 3 spleten vanwege de "sin(3α/2)"-term. Tussen 2 hoofdmaxima ligt in het algemeen maar 1 nevenmaximum. Het eerste hoofdmaximum krijg je ongeveer (niet precies vanwege de term met de β's) als de noemer sin(α/2) nul is. Dan is ook de teller 0, maar die wordt 3 maal zo vaak nul; vandaar dus die 2 minima. Als zowel teller als noemer gelijk zijn aan 0 is er ongeveer sprake van een hoofdmaximum. De β-termen gooien hier een beetje roet in het eten. Vandaar de voorzichtiger formulering: ongeveer.
Kortom:

Eerste orde hoofdmax dus ongeveeer als $\alpha/2=\pi$, dus als $k\, d \sin(\theta) = 2\pi$. Dus $\sin(\theta) = \lambda / d$. Dus $\theta \approx \lambda/d$.

4b

Intensiteit centrale hoofdmax is 9 I_0. (Dit is de limiet voor θ naar 0.) De intensiteit nabij het eerste orde hoofdmax krijg je door die 9 I_0 te vermenigvuldigen met $(\sin(\beta/2) / (\beta/2))^2$. Deze term van de vorm sin(x)/x in het kwadraat is namelijk altijd kleiner dan 1.
Onnodige toelichting: Omdat $d>=2a$ is β kleiner dan π en is $\beta/2$ dus kleiner dan $\pi/2$. Dus sin(x)/x ligt voor $x \in [0,\pi/2]$ altijd tussen 1 (bij x=0) en $2/\pi$ (bij $x=\pi/2$). In ieder geval is de term met de β's kleiner dan 1, maar tussen het cetrale hoofdmaximum en het eerste orde hoofdmaximum altijd ruim groter dan 0..

4c

Hoofdmaxima treden normaal op als $\sin(\theta) = m\, \lambda / d = m * 2\pi / (k\, d)$.
Nu liggen ze bij $\sin(\theta)= (2\pi\, m \pm \delta) / (k\, d)$.
Dit zie je direct door een schets te maken.
Het benodigde totale faseverschil van $2\pi\, m$ krijg je door de stralen na diffractie niet een faseverschil van $2\pi\, m$ te laten opbouwen, maar δ minder, omdat er bij de spleten al dat verschil is.

De gevraagde relatie volgt direct doordat $\sin(\theta) \approx \theta$ voor kleine diffractiehoeken.
De absoluutstrepen zorgen ervoor dat je nooit met een teken de mist in hoeft te gaan!

4d

d = 5a. Voor degene die het altijd beter weten $d = 5/2\, a$ is ook goed! Echter als $d<2\, a$, dus $d=5/3\, a$ of $5/4\, a$ is het niet erg zinvol om nog te spreken over hoofdmaxima.

4e

Het is een $\cos^2$ patroon, maar het valt wel snel af! Er is maar 1 minimum tussen de hoofdmaxima.
Het is dus veroorzaakt door maar 2 spleten.
Het 2e hoofdmax is weg! Dus $d=2a$ (of $a=d/2$).
Het derde hoofdmax ligt bij $\sin(\theta)=0.1$, dan is α gelijk aan 6π. Die waarde leest het makkelijkst af uit de grafiek.
Hieruit halen we d. Gebruik $k=2\pi/\lambda$ en $\alpha=6\pi$:
$d = \alpha /(k \sin(\theta)= 3\, \lambda /(0.1) = 30\, \lambda = 18\, \mu$m. Derhalve is de spleetbreedte a gelijk aan 9 μm.
Goed gerekend worden a's die tussen 8 en 10 μm liggen en d's die dus 2 keer zo groot zijn.