

Tentamen Golven en Optica

(NS-108B)

woensdag 17 april 2013, 13.30-16.30 uur

- Maak elke opgave op een **apart** vel voorzien van uw naam en studentnummer.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de 4 opgaven; elk onderdeel weegt even zwaar.

Opgave 1. Lopende golven en interferentie op een koord (2.5 punten)

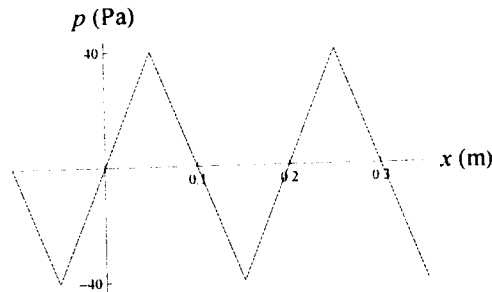
Twee pulsen y_1 en y_2 lopen over een oneindig lange snaar. De snaar heeft een massa μ per lengte-eenheid en is opgespannen langs de x -as met spankracht $F = 500$ N. De uitwijking y van de snaar wordt bepaald door de superpositie van beide pulsen: $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, met y_1 en y_2 gegeven door:

$$y_1(x, t) = \frac{4y_0}{(5x - 100t)^2 + 16} \quad \text{en} \quad y_2(x, t) = \frac{-4y_0}{(5x + 100t - 4)^2 + 16}$$

- Schets de afzonderlijke golven op $t = 0$ s. Geef hierin de waarde voor de maximale uitwijking en de positie x_m van het maximum aan. Geef ook de *breedte* Δx aan; punten waar de hoogte van de golf de helft van het maximum bedraagt.
- Toon aan dat beide pulsen aan de golfvergelijking voldoen.
- Bereken de voortplantingssnelheid van beide golven. In welke richting lopen ze?
- Bereken de waarde van μ .
- Geef een uitdrukking voor de transversale snelheid van de snaar op positie x als functie van de tijd t . (Het is niet nodig om deze uitdrukking zo veel mogelijk te vereenvoudigen.)
- Hoe groot is de transversale snelheid op positie $x = 0.4$ m als functie van de tijd t ? (Nu graag wel zoveel mogelijk vereenvoudigen.)
- Op welk moment is de uitwijking van de snaar overal gelijk aan nul?
- Hoeveel potentiële energie zit er in de golf op dat moment? Motiveer uw antwoord.

Opgave 2. Niet-harmonische geluidsgolf (2.5 punten)

In bijgaand plaatje ziet u de drukfluctuatie p van een niet-sinusoïdale vlakke geluidsgolf in lucht (1 atmosfeer) als functie van x op $t = 0$ s. De golf loopt in de $+x$ -richting. De geluidssnelheid is 344 m/s (bij 20°C). Het gewicht van 1 m³ lucht bij 1 atmosfeer is 1.2 kg.



- Schets de druk als functie van t op $x = 0$.
- Schets de deeltjesverplaatsing y in deze geluidsgolf als functie van x op $t = 0$. Zorg er voor dat deze verplaatsing, indien gemiddeld over één periode, gelijk is aan 0.
- Schets de deeltjesverplaatsing y in deze geluidsgolf als functie van t op $x = 0$.
- Bereken de grootste snelheid en de grootste versnelling van een volume-elementje lucht waar deze geluidsgolf doorheen reist.
- Wat is de frequentie van de grondtoon in deze geluidsgolf?
- Wat is de intensiteit van deze vlakke geluidsgolf? Om het rekenwerk te vergemakkelijken mag de drukfluctuatie benaderd worden door een sinus met dezelfde periode en amplitude.
- Hoe groot is de intensiteit van dezelfde geluidsgolf in het hooggebergte waar de luchtdruk maar half zo groot is (0.5 atmosfeer)? Aangenomen mag worden dat de temperatuur ook daar 20°C is.

Opgave 3. Poynting en Polarisatie (2.5 punten)

Een laserstraal is rechtsdraaiend circulair gepolariseerd en reist in de positieve x -richting door vacuüm. Op $t = 0$ wijst het E -veld in de positieve y -richting. De golflengte is λ .

- Geef de grootte van het E -veld als de bundel een continu vermogen van 10 mW heeft en de doorsnede 10 mm² is. Voor constanten als c hoeft u geen numerieke waarde in te vullen.
- Beschouw deze bundel als een vlakke golf en geef zowel de x -, y - als z -component van het E -veld. Geef ook de Poynting vector.
- In de bundel worden twee kwart-lambda plaatjes geplaatst. Beschrijf de polarisatietoestand van de doorgelaten bundel als deze plaatjes dezelfde oriëntatie hebben. En ook als het tweede kwart-lambda plaatje 90° gedraaid is ten opzichte van het eerste. En indien 45° gedraaid?
- In de bundel worden twee lineaire polarisatiefilters geplaatst. Beschrijf de polarisatietoestand van de doorgelaten bundel als deze filters dezelfde oriëntatie hebben. Als het tweede filter 90° gedraaid is ten opzichte van het eerste. En 45° gedraaid?

Opgave 4. Diffractie aan N spleten (2.5 punten)

We beschouwen het diffractiepatroon van N identieke spleten met onderlinge afstand d . De spleten mogen in eerste instantie oneindig smal worden verondersteld. De intensiteitsverdeling van het Fraunhofer diffractiepatroon op een scherm op grote afstand van de spleten wordt gegeven door:

$$I_N = I_0 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)^2, \quad \text{met} \quad \alpha = \frac{kd}{2} \sin(\theta).$$

Hier is I_0 de maximum intensiteit van een enkele spleet, k is het golfgetal en θ de afbuighoek.

- (a) Laat zien dat de uitdrukking voor I_N voor 2 spleten reduceert tot

$$I_2 = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{kd \sin(\theta)}{2} \right).$$

- (b) Schets in één figuur voor $N = 2$ en $N = 3$ het intensiteitspatroon op het scherm. Laat het gebied zien dat de eerste twee hoofdmaxima en het nulde orde maximum bevat (+1, 0, -1). Geef hierin duidelijk de ligging van de minima en (sub)maxima, evenals de waarden van de (sub)maxima, uitgedrukt in I_0 .
- (c) Laat zien, voor het algemene geval van N spleten, dat de intensiteit van de hoofdmaxima gelijk is aan $N^2 I_0$.
- (d) Motiveer waarom dit niet in tegenspraak is met de wet van behoud van energie. Een berekening wordt niet verlangd.

We beschouwen nu de situatie waarbij de N spleten een eindige breedte $a < d$ hebben. De intensiteitsverdeling van het Fraunhofer diffractiepatroon hiervan wordt aangeduid met $I_{N,a}$. Op het scherm blijkt het derde orde hoofdmaximum afwezig te zijn.

- (e) Bepaal de verhouding van de afstand tussen de spleten en de breedte van de spleten d/a .
- (f) Leg het begrip spectraal scheidend vermogen (Engels: chromatic resolving power) $R = \lambda/\Delta\lambda$ uit; licht toe wat zowel λ als $\Delta\lambda$ betekenen.
- (g) Leid de uitdrukking $R = Nm$ af voor het spectraal scheidend vermogen van dit N -spleten systeem. Leg uit waarom R niet van d afhangt en vermeld de betekenis van m .

Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

Hoofdstuk 15

- 15.1) $v = \lambda f$
- 15.5) $k = 2\pi/\lambda$ en $\omega = 2\pi f$
- 15.6) $\omega = vk$
- 15.7) $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige golf in de $+x$ -richting.
- 15.12) $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$, de golfvergelijking.
- 15.13) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, voor golven op een koord met spankracht F en massa per lengte eenheid μ .
- 15.xx) $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi)$, algemene vorm voor lopende harmonische golven met amplitude A (in één dimensie); de willekeurige fase ϕ wordt vaak weggelaten.
- 15.21) $P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$, vermogen van een golf.
- 15.25) $P_{av} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$, gemiddeld vermogen van sinusvormige golf.
- 15.26) $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, intensiteit is evenredig met kwadraat van de inverse afstand.
- 15.27) $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, superpositieprincipe.
- 15.28) $y(x, t) = A_{sw} \sin(kx) \sin(\omega t)$, staande golven op een koord, gefixeerd in $x = 0$.
- 15.33) $f_n = n \frac{v}{2L}$, frequenties staande golven op koord gefixeerd in $x = 0$ en $x = L$.
- a) f_1 , grondtoon, fundamental frequency
 - b) f_2 , eerste boventoon, second harmonic
 - c) f_n , $(n - 1)^{de}$ boventoon, n^{th} harmonic

Hoofdstuk 16

- 16.3) $p(x, t) = -B \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$, drukfluctuatie door gradiënt van de deeltjesverplaatsing in een geluidsgolf.
- 16.5) $p_{max} = BkA$, drukamplitude voor sinusvormige geluidsgolven; met B the bulk modulus en A de verplaatsingsamplitude.
- 16.7) $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven.
- 16.8) $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, geluidssnelheid in een ideaal gas; met γ de verhouding van warmtecapaciteit bij constante druk en die bij constant volume, R de gasconstante, T de temperatuur in K, en M de molaire massa.
- 16.9) $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven in een vaste staaf, met Y de Young modulus.
- 16.14) $I = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2 = \frac{p_{max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$, intensiteit (in W/m^2) van een sinusvormige geluidsgolf.

- 16.15) $\beta = (10 \text{ dB})^{10} \log \frac{I}{I_0}$, definitie van het geluidsniveau in decibel, met $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.
- 16.16) $f_n = \frac{nv}{2L}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan beide kanten open is.
- 16.22) $f_n = \frac{nv}{4L}$, ($n = 1, 3, 5, \dots$), frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan één kant open en aan de andere kant afgesloten is.
- 16.24) $f_{\text{beat}} = |f_a - f_b|$, beat frequentie van twee signalen met een klein onderling frequentieverschil.
- 16.29) $f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S} f_S$, Doppler effect; v_L en v_S zijn relatief t.o.v. een medium dat geluidssnelheid v heeft. Let op de tekens van v_L en v_S !!
- 16.30) $\sin(\alpha) = \frac{v}{v_S}$, hoek van schokgolf (deze heeft de vorm van een kegel) als de geluidsbron met snelheid $v_S > v$ door een medium met geluidssnelheid v reist.

Hoofdstuk 32

- 32.4) $E = cB$ in vacuüm.
- 32.5) $B = \epsilon_0 \mu_0 c E$
- 32.6) $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, lichtsnelheid in vacuüm.
- 32.17) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$, $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{e}_z B_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige vlakke electromagnetische golf in de $+x$ -richting, $\vec{e}_{y(z)}$ is de eenheidsvector in de $y(z)$ -richting en $E_{\text{max}} = c B_{\text{max}}$.
- 32.20) $E = vB$ en $B = \epsilon \mu v E$ in diëlectricum
- 32.21) $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, snelheid electromagnetische golf in een diëlectricum met permittiviteit $\epsilon = K \epsilon_0$ en permeabiliteit $\mu = K_m \mu_0$
- 32.22) $n = \frac{c}{v} = \sqrt{K K_m}$, brekingsindex. De relatieve permeabiliteit K_m is meestal ongeveer gelijk aan 1.
- 32.28) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, Poynting vector.
- 32.29) $I = S_{\text{av}} = \frac{E_{\text{max}} B_{\text{max}}}{2 \mu_0} = \frac{E_{\text{max}}^2}{2 \mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{max}}^2$, intensiteit van een sinusvormige golf in vacuüm, in W/m^2 , stroomsnelheid van energie.
- 32.31) $\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$, stroomsnelheid van impuls (momentum).
- 32.32) $p_{\text{rad}} = \frac{S_{\text{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt geabsorbeerd.
- 32.33) $p_{\text{rad}} = \frac{2S_{\text{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt gereflecteerd.
- 32.36) Staande golven. Bij reflectie van een e.m. golf in $x = 0$ aan een perfecte geleider heeft het \vec{E} -veld een knoop in $x = 0$, en ook als $x = n\lambda/2$ met ($n = 1, 2, \dots$); de knopen in het \vec{B} -veld zijn $\lambda/4$ verschoven.
- 32.xx) Dispersie relatie: ω als functie van k . Fasesnelheid $v_f(k) = \omega/k$. Groepsnelheid $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$.

Hoofdstuk 33

- 33.2) $\theta_r = \theta_i$, hoek van reflectie is hoek van inval.
- 33.4) $n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b)$, wet van Snellius.
- 33.5) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, golflengte in een medium met brekingsindex n .
- 33.6) $\sin(\theta_{\text{crit}}) = \frac{n_a}{n_b}$, de kritische hoek.
- 33.7) $I = I_{\text{max}} \cos^2(\phi)$, Wet van Malus, polarisatie van gepolariseerd licht; ϕ is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.
- 33.8) Brewster's wet: $\tan(\theta_p) = \frac{n_a}{n_b}$; θ_p is de Brewster hoek. De reflectiecoëfficiënt voor invallend licht dat 100% gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval en reflectie is bij deze hoek gelijk aan 0.
- 33.x) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t) \pm \vec{e}_z E_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)$, circulair gepolariseerde vlakke golf die loopt in de $+x$ -richting. Met het plusteken is de golf rechtsdraaiend indien u de golf tegemoet kijkt. De lengte van \vec{E} is altijd E_{max} .
- 33.y) Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit: $R_{\perp} = \sin^2(\theta_t - \theta_i) / \sin^2(\theta_t + \theta_i)$, en $R_{\parallel} = \tan^2(\theta_t - \theta_i) / \tan^2(\theta_t + \theta_i)$. Voor loodrechte inval ($\theta_i = 0$) reduceren deze uitdrukkingen tot $R = (n_2 - n_1)^2 / (n_2 + n_1)^2$.

Hoofdstuk 35

- 35.4) $d \sin(\theta) = m\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, constructieve interferentie als verschil in weglengte een geheel aantal golflengtes is. De afstand tussen 2 spleten is d .
- 35.4) $d \sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, destructieve interferentie als verschil in weglengte een halftalig aantal golflengtes is.
- 35.6) $y_m = m \frac{R\lambda}{d}$, positie van maxima in Young's experiment; R is de afstand tussen spleten en scherm, d is de afstand tussen de twee spleten. $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
- 35.7) $E_P = 2E \cos(\frac{\phi}{2})$, amplitude. Superpositie van 2 sinusvormige golven met gelijke amplitude en onderling faseverschil ϕ .
- 35.11) $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$, faseverschil ϕ is evenredig met verschil in weglengte.
- 35.14) $I = I_0 \cos^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)$, intensiteitspatroon van 2 oneindig smalle spleten in de Fraunhofer benadering.

Hoofdstuk 36

- 36.2) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$ met $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, minima voor diffractie aan één spleet met breedte a .
- 36.7) $I = I_0 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte a .
- 36.xx) $I = I_0 \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan n spleten met onderlinge afstand d en verwaarloosbare breedte.
- 36.13) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand d .
- 36.15) $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$, spectraal scheidend vermogen.

- 36.16) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{2d}$ met $m = 1, 2, 3, \dots$, Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand d . De hoek θ is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.
- 36.17) $\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter D het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.

Goniometrie

- $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$
- $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a)$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$