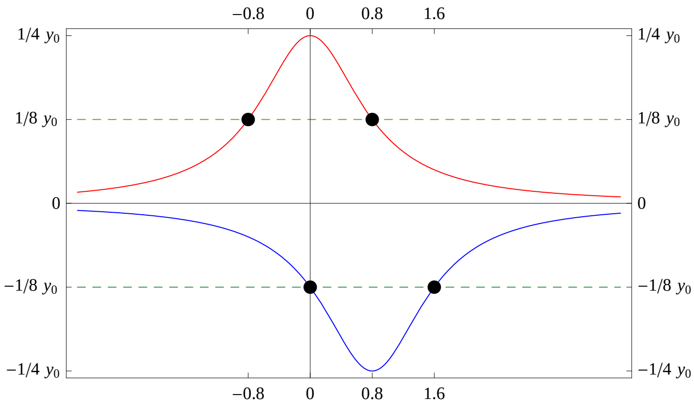
Uitwerkingen tentamen G&O

17 april 2013

Opgave 1

a)



b) De eerste puls is een functie van $x - v\,t$, de tweede van $x + v\,t$. In beide pulsen heeft v dezelfde waarde. Ze voldoen daarom afzonderlijk, maar ook indien bij elkaar opgeteld, aan dezelfde golfvergelijking: $f_{x\,x} = \frac{1}{v^2}\,f_{t\,t}$.

c) $v = 20$ m/s.

d) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, dus $\mu = \frac{F}{v^2} = \frac{500}{20^2} = 1.25$ kg/m.

e) $\frac{\partial y}{\partial t}$

Wil je laten zien dat je kunt differentiëren dan wordt het antwoord dus:

$$\frac{800\,(-100\,t+5\,x)\,y_0}{\left(16+(-100\,t+5\,x)^2\right)^2}+\frac{800\,(-4+100\,t+5\,x)\,y_0}{\left(16+(-4+100\,t+5\,x)^2\right)^2}$$

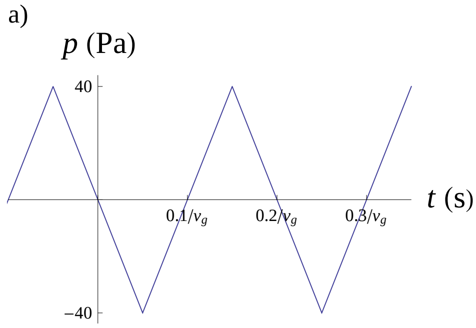
f) 0 m/s

g) als t=0.02 s (n.l. als $-100\,t = 100\,t - 4$)

h) 0 J. De snaar is nergens uitgerekt.

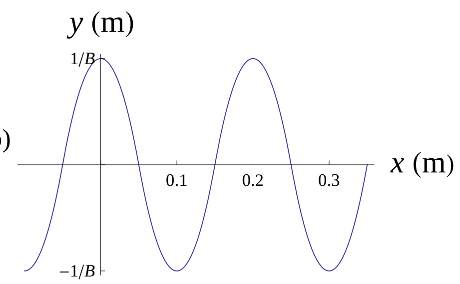
Opgave 2

a)



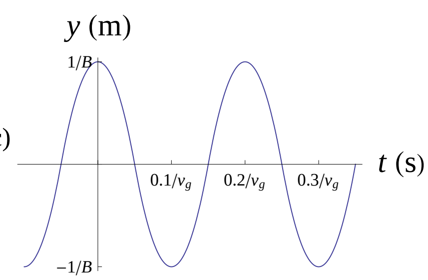
Schets moet op $t = 0$ omlaag lopen en is dus qua vorm dus gespiegeld rondom de x-as vergeleken met het figuur in opgave. De nuldoorgangen zijn op $t = \frac{k}{3440}$ s, met k een geheel getal. In bovenstaande schets figuur is het symbool v_g gebruikt dat is dus 344.

b)



$y(x, t) = -\frac{1}{B}$ maal de integraal van p . In bovenstaande schets is het symbool B gebruikt. De waarde ervan is $1.42\ 10^5$, n.l. $B = \rho\, v_g^{\ 2} = 1.2 \times 344^2 = 1.42\ 10^5$. Toelichting: rond $x = 0$ is p evenredig met x. De integraal is een dalparabool. Vermenigvuldig met $-\frac{1}{B}$ en je krijgt juist een top bij $x = 0$. Kortom de stukjes boven de x-as zijn bergparabolen, de stukken eronder dalparabolen.

c)



De schets hier is identiek aan die bij b) alleen staat nu langs de x-as de tijd uitgezet, en de extremen zijn dus op $0.1/v_g$ etc.

d) Maximale snelheid: $\frac{v\, p_{\max}}{B} = \frac{p_{\max}}{\rho\, v} = \frac{40}{1.2 \times 344} \approx 0.1$ m/s. Maximale versnelling: $\frac{v^2}{B}$ 800 Pa/m = 800/ρ = 667 $\mathrm{m/s^2}$. Merk op: 800 Pa/m is de helling in de gegeven figuur.

e) $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{344}{0.2} = 1720$ Hz.

f) $I = p_{\max}^{\ 2} / (2\, \rho\, v) = 40^2 / (2 \times 1.2 \times 344) = 1.9\ \mathrm{W/m^2}$

g) Intensiteit wordt tweemaal zo groot.
Merk op voor een (ideaal) gas geldt dat als de druk halveert de dichtheid (=aantal moleculen per volume-eenheid) ook halveert. Dit volgt uit Wet van Boyle of de ideale gaswet bij constante temperatuur. Verder geldt dat v gelijk blijft, zie 16.8. omdat de temperatuur niet verandert.

Opgave 3

a) Intensiteit is I=1000 W/m^2, invullen in formule 32.29 van formuleblad geeft $E_{\max} = \sqrt{2\, I\, c\, \mu_0}$ en een numerieke waarde $E_{\max}$ = 868 V/m. Maar dat is niet goed! (bij dit antwoord: helft van de score)

Het juiste antwoord is: $E_{\max} = \sqrt{I\, c\, \mu_0} \approx 614$ V/m. Zie vraag b. Beide antwoorden worden bij vraag a) echter goedgerekend.

De y-component van het E-veld van een lineair gepolariseerde golf met dezelfde intensiteit I is $\sqrt{2\, I\, c\, \mu_0}\ \cos(k\, x - t\, \omega)$, en omdat de x- en z-component altijd nul zijn is het verleidelijk om de absolute waarde hiervan te interpreteren als de grootte van het E-veld. (Bij dit antwoord: helft van de score)

b) $\vec{E} = E_{\max} * \{0, \cos(k\,x - t\,\omega), \sin(k\,x - t\,\omega)\}$, met k=2π/λ en ω=c/λ. Dus $\|\vec{E}\|= E_{\max}$.

Poynting vector wijst in de positieve x-richting en is **altijd** even lang. De grootte van de E-vector is namelijk altijd $E_{\max}$; de grootte van de B-vector is dus altijd $E_{\max}$/c en deze vector staat loodrecht op de E-vector, en ligt ook altijd in het yz-vlak. Dus $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B} = \left\{\frac{(E_{\max})^2}{c\,\mu_0},\ 0,\ 0\right\}$, en dus is $I = S_{\text{av}} = \frac{(E_{\max})^2}{c\,\mu_0}$. (Als uit het antwoord op deze vraag duidelijk blijkt dat $I = \frac{(E_{\max})^2}{c\,\mu_0}$, kan het antwoord op vraag a) alsnog helemaal goed worden gerekend.)

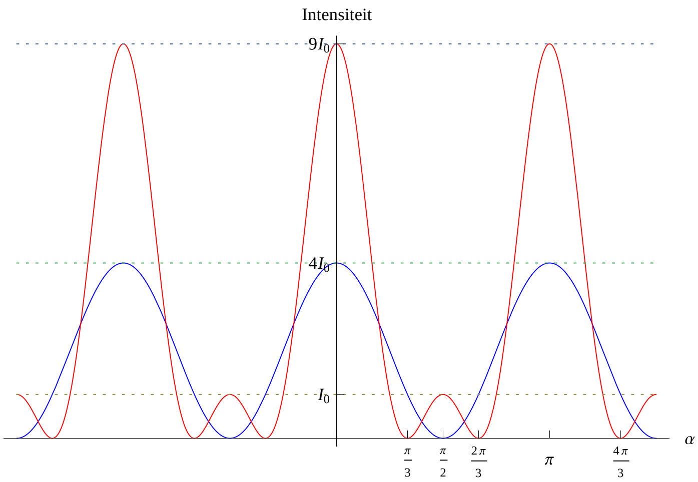
c)
2e plaatje zelfde oriëntatie: linksdraaiend circulair gepolariseerd.
2e plaatje 90° gedraaid: weer rechtsdraaiend gepolariseerd.
2e plaatje 45° gedraaid: lineair gepolariseerd; het 2e plaatje verandert niets aan de bundel.

d)
2e filter zelfde oriëntatie: lineair gepolariseerd; het 2e filter verandert niets aan de bundel; door eerste filter wordt de intensiteit gehalveerd (maar dat werd niet gevraagd).
2e filter 90° gedraaid: Geen doorgaande bundel alles wordt tegengehouden.
2e filter 45° gedraaid: Weer lineair gepolariseerd; polarisatievlak is 45° gedraaid en wordt dus bepaald door het 2e filter, de intensiteit is nog maar 1/4 van de oorspronkelijke intensiteit.

Opgave 4

a) $\sin(2\,\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, en invullen.

b)



c) L'Hopital of de limiet berekenen voor α naar 0 (of naar een veelvoud van π).

```
∂{α} Sin[N α]
------------- /. α → 0
∂{α} Sin[α]
```

N

d) Concentratie van energie in de maxima, maar in de minima is de intensiteit 0; gemiddeld over α kom je netjes uit op N * I_0.

e) d/a=3.
Afleiding: Derde orde hoofdmaximum als $\frac{\pi\,d\sin(\theta)}{\lambda} = 3\,\pi$, dus $\sin(\theta) = \frac{3\,\lambda}{d}$.
Minima in diffractiepatroon enkele spleet met breedte a als: $\frac{\pi\,a\sin(\theta)}{\lambda} = \pi\,m$, met m=1,2,....
Komen voor bij dezelfde hoek: elimineren van $\sin(\theta)$. Dus $\frac{d}{a} = \frac{3}{m}$. Ofwel $\frac{d}{a} = 3$, en als tweede mogelijkhied

$\frac{d}{a} = \frac{3}{2}$.

f) Met het Rayleigh criterium kunnen (overeenkomende) hoofdmaxima in het diffractie patroon, veroorzaakt door 2 golflengtes λ en $\lambda+\Delta\lambda$, juist als gescheiden worden waargenomen. Een grotere waarde voor R geeft dus aan dat kleuren beter van elkaar kunnen worden gescheiden.

g) m^{de} hoofdmax bij λ_1: $\frac{1}{2}\, d\, k_1 \sin(\theta) = \pi\, m$

eerste minimum voorbij m^{de} hoofdmax bij λ_2 : $\frac{1}{2}\, d\, k_2 \sin(\theta) = \pi\, m + \frac{\pi}{N}$

Als deze samenvallen worden ze worden de hoofdmaxima juist als gescheiden waargenomen. Dat is het Rayleigh criterium. Oplossen naar $\sin(\theta)$ geeft $\frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{m\,N} + 1$, en de d valt er uit!

Dus $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{m\,N} + 1$. Kies nu $\lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda$, en $\lambda_2 = \lambda$, dan volgt $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m\,N$.