

Tentamen Golven en Optica

(NS-108B)

donderdag 16 april 2015, 9.00-12.00 uur

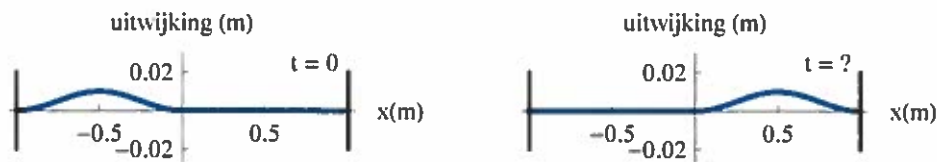
- Voorzie elk vel van uw naam en studentnummer. Maak elke opgave op een apart vel.
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Verdeel uw tijd optimaal over de 4 opgaven; elke opgave weegt even zwaar.

Opgave 1. Golven op een snaar (2.5 punten)

Een stevige snaar met een dwarsdoorsnede van 1 mm^2 en een lengte van 2 m is opgespannen met een spankracht van 400 N . De snaar is bevestigd tussen twee vaste punten $x = -1 \text{ m}$ en $x = +1 \text{ m}$. De snaar weegt 5 gram .

- Op $t = 0$ is de uitwijking gegeven door $y(x, t = 0) = A \cos(\frac{\pi}{2}x)$ waarbij x wordt gegeven in meter. De snaar trilt in de grondtoon met amplitude A . Geef de algemene formule voor de uitwijking $y(x, t)$ van deze snaar in termen van x , t , het golfgetal k , de hoekfrequentie ω en de amplitude A .
- Geef de numerieke waarde van k en ω inclusief dimensie.
- Schrijf deze staande golf als combinatie van twee lopende golven, waarbij één lopende golf een functie van $kx - \omega t$ en de ander een functie van $kx + \omega t$ is.

Vervolgens wordt de snaar op een andere wijze in trilling gebracht. Een momentopname op tijdstip $t = 0$ is weergegeven in de linker figuur. Op een ander tijdstip ziet de golf er uit als in de rechter figuur.



- Bepaal alle **mogelijke** tijdstippen $t > 0$ waarop de snaar de vorm kan hebben zoals in de rechter figuur. Het is niet gegeven hoe de vorm van de snaar verandert als functie van de tijd.

De kinetische energie per lengte-eenheid $u_k(x, t)$ wordt gegeven door $u_k(x, t) = \frac{1}{2} \mu v_y(x, t)^2$, waarin $v_y(x, t)$ de transversale snelheid van het punt x op het koord is. De potentiële energie per lengte-eenheid $u_p(x, t)$ wordt gegeven door:

$$u_p(x, t) = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2.$$

Op $t = 0$ is de uitwijking van de snaar gegeven als $y(x, 0) = 0.01 \sin(\pi x)^2 \text{ m}$, indien x (in m) ligt tussen -1 en 0 . Voor positieve waarden van x is de uitwijking op $t = 0$ gelijk aan 0 .

- Bereken de potentiële energie in de snaar op $t = 0$.
- Wat kunt u zeggen over de totale hoeveelheid energie in de snaar?

Opgave 2. Kennisvragen (2.5 punten)

Beantwoord de volgende vragen kort, maar wel zo duidelijk mogelijk.

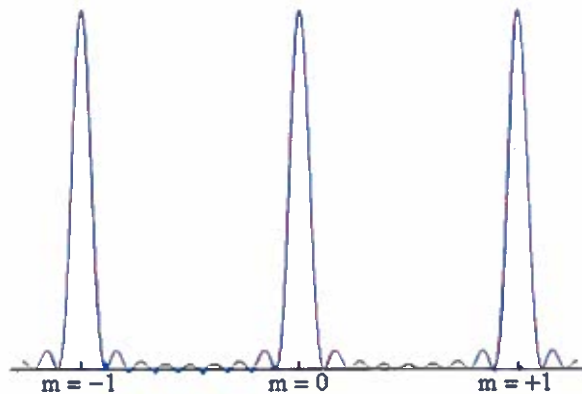
- Wat betekent het dat een elektromagnetische golf transversaal is?
- Wat weet je zoal over een vlakke elektromagnetische golf (ofwel een lichtbundel) als je weet dat die 100% gepolariseerd is in de x -richting?
- Wat is een dubbelbrekend kristal? Geef bijv. eigenschappen.
- Wanneer is er sprake van complete interne reflectie?
- Wat is Bragg-reflectie? Leg uit waarom de interferentie-formules zoveel lijken op die van een spleet-systeem, terwijl er helemaal geen sprake is van zo'n systeem. Ofwel: wat is de overeenkomst?

Opgave 3. Tralie (2.5 punten)

De intensiteitsverdeling van een systeem van N spleten met verwaarloosbare breedte wordt met onderstaande vergelijking beschreven:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)} \right)^2, \quad \alpha = \frac{kd}{2} \sin(\theta)$$

met N het aantal spleten, I_0 de intensiteit van een individuele spleet, d de afstand tussen de spleten en θ de afbuighoek. Als een vlakke monochromatische golf met golfgetal k op deze spleten valt, is op een scherm het volgende Fraunhofer diffractiepatroon zichtbaar. De bijschriften langs de x -as geven de positie van hoofdmaxima aan.



- Door hoeveel spleten is bovenstaand diffractiepatroon geproduceerd? Leg uit.
- Hoe groot is de maximale intensiteit van het diffractiepatroon van dit N -spleten systeem?
- Bij welke afbuighoeken heeft het bovenstaande diffractiepatroon minima? (Zorgvuldig formuleren s.v.p.)

Een N -spleten systeem, N is dus niet gelijk aan het aantal berekend in (a), wordt nu belicht door een laserbundel met golflengte $\lambda = 600$ nm. Ga er vanuit dat de bundel loodrecht invalt en beschreven kan worden als een vlakke elektromagnetische golf.

- Voor welke afbuighoeken treden hoofdmaxima op?

- (e) Geef de waarden voor N en d opdat het eerste hoofdmaximum zich onder een afbuig-hoek van 30 graden bevindt.

De lichtbundel blijkt misschien te bestaan uit 2 golflengtes: 600 nm en 601 nm.

- (f) Omschrijf het Rayleigh criterium dat gebruikt wordt om aan te tonen of twee golf-lengtes te scheiden zijn met zo'n tralie.
- (g) Hoeveel spleten N en welke spleetafstand d , moet dit tralie hebben opdat zo'n doublet juist gescheiden kan worden 'rond' het eerste hoofdmaximum, indien dat onder (on-geveer) 30 graden wordt waargenomen? Hoe breed moet het tralie, of de lichtbundel die op het tralie valt, dus minimaal zijn om beide golflengtes te kunnen scheiden?

Opgave 4. Dipool-Rayleigh-Polarisatie (2.5 punten)

Beschouw een oscillerende elektrische dipool in de oorsprong, met dipoolmoment langs de z -as. Deze zendt langs de z -as geen straling uit, maar wel in alle andere richtingen. De amplitude van het elektrische veld in een punt \vec{r} is n.l. evenredig met $\sin(\theta)$, waarbij θ de hoek tussen \vec{r} met de z -as is.

- (a) Hoe neemt de amplitude van de door de dipool uitgezonden elektromagnetische straling af met de afstand r ?
- (b) Beschrijf de polarisatie van de elektromagnetische straling uitgezonden door zo'n di-pool voor een punt \vec{r} in het xy -vlak.
- (c) Beschrijf de afhankelijkheid van de door de dipool uitgezonden intensiteit als functie van θ .

Beschouw nu een lichtbron ver weg in de negatieve x -richting die on gepolariseerd licht uit-zendt. Een atoom of molecuul waaraan Rayleigh scattering plaatsvindt bevindt zich op de positieve z -as, en de waarnemer bevindt zich in oorsprong.

- (d) Verklaar waarom, bij Rayleigh scattering, het licht dat onder 90 graden verstrooid wordt 100 % gepolariseerd is.
- (e) Beredeneer in welke richting het verstrooide licht dat in de oorsprong wordt waarge-nomen is gepolariseerd.

lege pagina

Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

Hoofdstuk 15

- 15.1) $v = \lambda f$
- 15.5) $k = 2\pi/\lambda$ en $\omega = 2\pi f$
- 15.6) $\omega = vk$
- 15.7) $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige golf in de $+x$ -richting.
- 15.12) $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$, de golfvergelijking.
- 15.13) $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, voor golven op een koord met spankracht F en massa per lengte eenheid μ .
- 15.xx) $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi)$, algemene vorm voor lopende harmonische golven met amplitude A (in één dimensie); de willekeurige fase ϕ wordt vaak weggelaten.
- 15.yy) Bij interface 1 \rightarrow 2: Transmissiecoëfficiënt $\frac{2v_2}{v_2+v_1}$; Reflectiecoëfficiënt $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}$
- 15.21) $P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$, vermogen van een golf.
- 15.25) $P_{av} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$, gemiddeld vermogen van sinusvormige golf.
- 15.26) $\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, intensiteit is evenredig met kwadraat van de inverse afstand.
- 15.27) $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, superpositieprincipe.
- 15.28) $y(x, t) = A_{SW} \sin(kx) \sin(\omega t)$, staande golven op een koord, gefixeerd in $x = 0$.
- 15.33) $f_n = n \frac{v}{2L}$, frequenties staande golven op koord gefixeerd in $x = 0$ en $x = L$.
- a) f_1 , grondtoon, fundamental frequency
 - b) f_2 , eerste boventoon, second harmonic
 - c) f_n , $(n - 1)^{\text{de}}$ boventoon, n^{th} harmonic

Hoofdstuk 16

- 16.3) $p(x, t) = -B \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$, drukfluctuatie door gradiënt van de deeltjesverplaatsing in een geluidsgolf.
- 16.5) $p_{\max} = BkA$, drukamplitude voor sinusvormige geluidsgolven; met B the bulk modulus en A de verplaatsingsamplitude.
- 16.7) $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven.
- 16.8) $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, geluidssnelheid in een ideaal gas; met γ de verhouding van warmtecapaciteit bij constante druk en die bij constant volume, R de gasconstante, T de temperatuur in K, en M de molaire massa.
- 16.9) $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven in een vaste staaf, met Y de Young modulus.
- 16.14) $I = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2 = \frac{p_{\max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{\max}^2}{2\sqrt{\rho B}}$, intensiteit (in W/m^2) van een sinusvormige geluidsgolf.

- 16.15) $\beta = (10 \text{ dB})^{10} \log \frac{I}{I_0}$, definitie van het geluidsniveau in decibel, met $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.
- 16.16) $f_n = \frac{nv}{2L}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan beide kanten open is.
- 16.22) $f_n = \frac{nv}{4L}$, ($n = 1, 3, 5, \dots$), frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan één kant open en aan de andere kant afgesloten is.
- 16.24) $f_{\text{beat}} = |f_a - f_b|$, beat frequentie van twee signalen met een klein onderling frequentieverschil.
- 16.29) $f_L = \frac{v+v_L}{v+v_S} f_S$, Doppler effect; v_L en v_S zijn relatief t.o.v. een medium dat geluidssnelheid v heeft. Let op de tekens van v_L en v_S !!
- 16.30) $\sin(\alpha) = \frac{v}{v_S}$, hoek van schokgolf (deze heeft de vorm van een kegel) als de geluidsbron met snelheid $v_S > v$ door een medium met geluidssnelheid v reist.

Hoofdstuk 32

- 32.4) $E = cB$ in vacuüm.
- 32.5) $B = \epsilon_0 \mu_0 c E$
- 32.6) $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, lichtsnelheid in vacuüm.
- 32.17) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$, $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{e}_z B_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige vlakke electromagnetische golf in de $+x$ -richting, $\vec{e}_{y(z)}$ is de eenheidsvector in de $y(z)$ -richting en $E_{\text{max}} = c B_{\text{max}}$.
- 32.20) $E = vB$ en $B = \epsilon \mu v E$ in diëlectricum
- 32.21) $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, snelheid electromagnetische golf in een diëlectricum met permittiviteit $\epsilon = K \epsilon_0$ en permeabiliteit $\mu = K_m \mu_0$
- 32.22) $n = \frac{c}{v} = \sqrt{K K_m}$, brekingsindex. De relatieve permeabiliteit K_m is meestal ongeveer gelijk aan 1.
- 32.28) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, Poynting vector.
- 32.29) $I = S_{\text{av}} = \frac{E_{\text{max}} B_{\text{max}}}{2 \mu_0} = \frac{E_{\text{max}}^2}{2 \mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{max}}^2$, intensiteit van een sinusvormige golf in vacuüm, in W/m^2 , stroomsnelheid van energie.
- 32.31) $\frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$, stroomsnelheid van impuls (momentum).
- 32.32) $p_{\text{rad}} = \frac{S_{\text{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt geabsorbeerd.
- 32.33) $p_{\text{rad}} = \frac{2S_{\text{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt gereflecteerd.
- 32.36) Staande golven. Bij reflectie van een e.m. golf in $x = 0$ aan een perfecte geleider heeft het \vec{E} -veld een knoop in $x = 0$, en ook als $x = n\lambda/2$ met ($n = 1, 2, \dots$); de knopen in het \vec{B} -veld zijn $\lambda/4$ verschoven.
- 32.xx) Dispersie relatie: ω als functie van k . Fasesnelheid $v_f(k) = \omega/k$. Groepsnelheid $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$.

Hoofdstuk 33

- 33.2) $\theta_r = \theta_i$, hoek van reflectie is hoek van inval.
- 33.4) $n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b)$, wet van Snellius.
- 33.5) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, golflengte in een medium met brekingsindex n .
- 33.6) $\sin(\theta_{\text{crit}}) = \frac{n_a}{n_b}$, de kritische hoek.
- 33.7) $I = I_{\text{max}} \cos^2(\phi)$, Wet van Malus, polarisatie van gepolariseerd licht; ϕ is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.
- 33.8) Brewster's wet: $\tan(\theta_p) = \frac{n_a}{n_b}$; θ_p is de Brewster hoek. De reflectiecoëfficiënt voor invallend licht dat 100% gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval en reflectie is bij deze hoek gelijk aan 0.
- 33.x) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t) \pm \vec{e}_z E_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)$, circulair gepolariseerde vlakke golf die loopt in de $+x$ -richting. Met het plusteken is de golf rechtsdraaiend indien u de golf tegemoet kijkt. De lengte van \vec{E} is altijd E_{max} .
- 33.y) Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit: $R_{\perp} = \sin^2(\theta_t - \theta_i) / \sin^2(\theta_t + \theta_i)$, en $R_{\parallel} = \tan^2(\theta_t - \theta_i) / \tan^2(\theta_t + \theta_i)$. Voor loodrechte inval ($\theta_i = 0$) reduceren deze uitdrukkingen tot $R = (n_2 - n_1)^2 / (n_2 + n_1)^2$.

Hoofdstuk 35

- 35.4) $d \sin(\theta) = m\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, constructieve interferentie als verschil in weglengte een geheel aantal golflengtes is. De afstand tussen 2 spleten is d .
- 35.4) $d \sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, destructieve interferentie als verschil in weglengte een halftallig aantal golflengtes is.
- 35.6) $y_m = m \frac{R\lambda}{d}$, positie van maxima in Young's experiment; R is de afstand tussen spleten en scherm, d is de afstand tussen de twee spleten. $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
- 35.7) $E_P = 2E \cos(\frac{\phi}{2})$, amplitude. Superpositie van 2 sinusvormige golven met gelijke amplitude en onderling faseverschil ϕ .
- 35.11) $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$, faseverschil ϕ is evenredig met verschil in weglengte.
- 35.14) $I = I_0 \cos^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)$, intensiteitspatroon van 2 oneindig smalle spleten in de Fraunhofer benadering.

Hoofdstuk 36

- 36.2) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$ met $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, minima voor diffractie aan één spleet met breedte a .
- 36.7) $I = I_0 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte a .
- 36.xxx) $I = I_0 \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2$ met $x = \frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan n spleten met onderlinge afstand d en verwaarloosbare breedte.
- 36.13) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand d .
- 36.15) $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$, spectraal scheidend vermogen.

- 36.16) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{2d}$ met $m = 1, 2, 3, \dots$, Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand d . De hoek θ is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.
- 36.17) $\sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter D het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.

Goniometrie

- $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$
- $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a)$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$