

# Tentamen Golven en Optica (NS-108B)

woensdag 29 juni 2022, 13.30 - 16.30 uur

- U heeft 3 uur voor deze toets (extra tijd: 3 uur en 30 minuten).
- **Maak elke opgave op een apart antwoordvel voorzien van uw naam en studentnummer.**
- Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.
- In totaal zijn 100 punten te behalen. Bij elk van de drie opgaven is het totaal aantal punten en de puntenverdeling per onderdeel aangegeven. De puntentoekening zegt niets over moeilijkheidsgraad van of tijdsinspanning voor het onderdeel.
- Binnen elke opgave worden de onderdelen over het algemeen steeds moeilijker. Verdeel uw tijd optimaal over de opgaven en ga door wanneer u ergens vastloopt.
- Indien een onderdeel van een opgave niet lukt en u heeft het antwoord nodig voor een vervolgonderdeel, dan mag u met een door u verzonnen redelijk antwoord verder werken. Wanneer het antwoord op vervolgonderdelen niet noemenswaardig versimpelt, dan kunt u nog steeds volle punten krijgen.
- U vindt een Formuleblad als aanhangsel bij deze toets.

### Opgave 1. Elektromagnetische vlakke golf (30 punten)

Maak elke opgave op een apart antwoordvel voorzien van uw naam en studentnummer

- (a) 6 pt Leid de golfvergelijking in vacuüm voor  $\vec{E}$  af uit de Maxwellvergelijkingen.

De algemene vlakke golf met frequentie  $\omega$ ,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1)$$

is een oplossing van de golfvergelijking in vacuüm. We beschouwen nu de concrete situatie met  $\vec{k} = k\hat{z}$  en  $\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\hat{y}$ .

- (b) 6 pt Geef een uitdrukking voor het magnetisch veld  $\vec{B}$  van de golf in termen van de gegeven grootheden.  
N.B. U kunt een Maxwellvergelijking gebruiken om dit te berekenen, maar u mag het antwoord ook beargumenteren.
- (c) 6 pt Bereken de Poynting-vector van deze golf, de irradiantie (tijdgemiddelde Poynting-vector) en de intensiteit ter plaatse van een vlak met normaal  $\vec{n} = \hat{z}$ .  
N.B. is het bij het vorige onderdeel niet gelukt een uitdrukking voor  $\vec{B}$  te vinden, beargumenteer dan zoveel mogelijk eigenschappen van de gevraagde grootheden voor een deel van de punten.

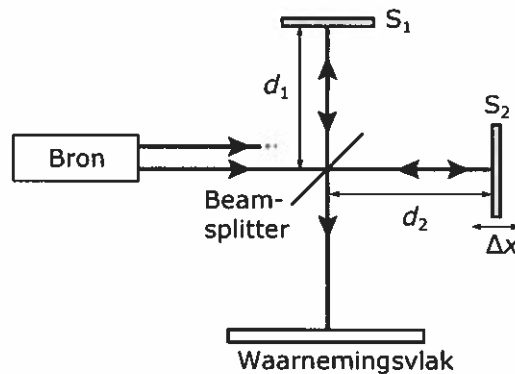
De golf die u in de voorgaande twee onderdelen hebt beschouwd, reist door een (ideaal) kwart-lambda-faseplaatje met de normaal in de  $\hat{z}$ -richting en de snelle as in de (verticale)  $\hat{y}$ -richting.

- (d) 6 pt Hoe omschrijft u de polarisatietoestand van de golf na passage van het faseplaatje?  
N.B. Een uitgebreide berekening met het Jones-formalisme kan van nut zijn, maar is niet vereist.
- (e) 6 pt Beargumenteer of Poynting-vector, irradiantie en intensiteit na passage van het faseplaatje anders zijn dan vóór het faseplaatje. U mag uw antwoord naar wens onderbouwen met een berekening, maar de waarden van de grootheden worden niet gevraagd.  
N.B. Voor het beantwoorden van dit onderdeel is het antwoord van (d) niet vereist; u kunt ook redeneren vanuit algemene eigenschappen van een faseplaatje.

### Opgave 3. Michelson-interferometer (30 punten)

Maak elke opgave op een apart antwoordvel voorzien van uw naam en studentnummer

Een Michelson-interferometer is een instrument dat onder meer gebruikt kan worden om met grote nauwkeurigheid kleine verplaatsingen te meten. Het principe van de interferometer is weergegeven in Figuur 3.



Figuur 3: Werking van de Michelson-interferometer.

Een evenwijdige lichtbundel valt van links in op een zogenaamde bundelsplitser (*beam-splitter*). Deze reflecteert 50% van de intensiteit en laat 50% door. Elk van de twee bundels wordt weerkaatst door een spiegel. De spiegels  $S_1$  en  $S_2$  staan op afstanden  $d_1$  resp.  $d_2$  van de bundelsplitser. Vervolgens wordt van de teruggekaatste bundels ieder weer de helft van de intensiteit doorgelaten en de helft gereflecteerd. In het waarnemingsvlak komen dus twee golven samen die verschillende paden hebben afgelegd. Afhankelijk van het weglengteverschil treedt in het waarnemingsvlak constructieve dan wel destructieve interferentie op.

Tijdens het experiment verschuift spiegel  $S_2$  over een afstand  $\Delta x$ ; hierdoor verandert de waargenomen intensiteit. De interferometer bevindt zich in vacuüm.

U mag ervan uitgaan dat de samenkomende golven na de bundelsplitser gelijke amplitude en polarisatie hebben.

Vaak wordt als lichtbron een laser gebruikt.

- (a) 5 pt Leg aan de hand van de eigenschappen van laserlicht uit waarom juist een laser een zeer geschikte lichtbron is voor gebruik in een Michelson-interferometer.

We beschouwen nu als bron een vlakke golf met golflengte  $\lambda$  die op de bundelsplitser valt. De interferometer wordt zo afgesteld dat bij  $\Delta x = 0$  de intensiteit maximaal is.

- (b) 6 pt Leid af dat bij verschuiving van spiegel  $S_2$  over een afstand  $\Delta x$  de intensiteit die in het waarnemingsvlak wordt gemeten varieert als  $I \propto 1 + \cos\left(\frac{2\omega\Delta x}{c}\right)$ . U mag aannemen dat het veld afkomstig van  $S_1$  altijd kan worden geschreven als  $\vec{E}_1$ .

Uit het resultaat van onderdeel (b) blijkt dat de exacte waarden van  $d_1$  en  $d_2$  niet relevant zijn bij het uitvoeren van het experiment: deze variabelen komen niet voor in de uitdrukking voor  $I$ .

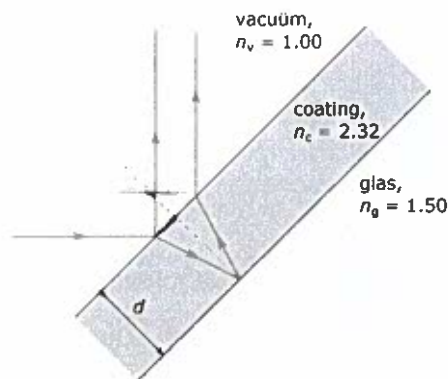
- (c) 6 pt Leg uit waarom dit vanwege natuurkundige redenen zo moet zijn.  
N.B. Uitsluitend verwijzen naar de formule die bij (b) is afgeleid is niet voldoende.

Een belangrijk onderdeel van de interferometer is de bundelsplitser, waar het laserlicht onder een hoek van  $45^\circ$  op valt.

We gaan er in de rest van deze opgave van uit dat het licht s-gepolariseerd is.

- (d) 6 pt Toon met een berekening aan dat voor een bundelsplitser van glas ( $n_g = 1.50$ ) lang geen 50% van de intensiteit door de bundelsplitser wordt gereflecteerd.

Om ervoor te zorgen dat er meer licht wordt gereflecteerd, wordt het glas van de bundelsplitser voorzien van een dunne coating van zinksulfide (dikte  $d$ , brekingsindex  $n_c = 2.32$ ). Het gereflecteerde licht bestaat nu uit twee componenten: een deel dat direct op de overgang van vacuüm naar de coating is gereflecteerd en een deel dat door de coating gaat, gereflecteerd wordt op de overgang van coating naar glas en weer naar buiten treedt. Zie Figuur 4.



Figuur 4: Effect van een coating op de reflectie van de bundelsplitser.

- (e) 6 pt Leid af dat deze twee componenten maximaal constructief interfereren onder de voorwaarde dat  $\frac{2d}{\cos\theta_t} \left( n_c - \frac{\sin\theta_t}{\sqrt{2}} \right) = (m - \frac{1}{2})\lambda$ , waarin  $\theta_t$  de brekingshoek in de coating is en  $m$  een positief geheel getal.

HINT: bereken eerst de weglengtes over de twee paden, vervolgens de fases en tot slot het faseverschil.

Het gebruikte laserlicht heeft een golflengte van 633 nm.

- (f) 6 pt Bereken de minimale dikte die de coating moet hebben voor maximale reflectie, en bereken het percentage van de intensiteit dat nu door de bundelsplitser wordt gereflecteerd.

\*\*\* EINDE \*\*\*

♡ Succes

-Sofie

# Formuleblad Golven en Optica

Versie 20 juni 2022

**Algemeen** In dit formuleblad gebruiken we de symbolen  $x, y, z, t, F, \mu, P, p_0, \rho, l, \omega, q_e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $v, k, r, t, R, T, \lambda, \theta, \phi, \vec{E}, \vec{B}, \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$ ,  $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \text{ C}^{-2}$ ,  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $\chi, \mathcal{N}, n, \kappa, N, \vec{S}, I$  in hun gebruikelijke betekenis, tenzij anders vermeld.

- $\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta \cos\phi \pm \cos\theta \sin\phi$
- $\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta \cos\phi \mp \sin\theta \sin\phi$
- $\sin\theta + \sin\phi = 2 \sin((\theta + \phi)/2) \cos((\theta - \phi)/2)$
- $\cos\theta + \cos\phi = 2 \cos((\theta + \phi)/2) \cos((\theta - \phi)/2)$
- $\cos\theta - \cos\phi = -2 \sin((\theta + \phi)/2) \sin((\theta - \phi)/2)$
- $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$
- $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$
- $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$  (sinusregel)
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$  (cosinusregel)
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$  (Euler)

## Mechanische golven (Week 1 en 2)

- d'Alembert:  $\psi(x, t) = \frac{f(x-vt) + f(x+vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(z) dz$
- Scheiding van variabelen:  $\psi(x, t) = f(x)g(t)$   
 $f(x) = A_s \sin(\frac{\omega}{v}x) + A_c \cos(\frac{\omega}{v}x)$ ,  $g(t) = B_s \sin(-\omega t) + B_c \cos(-\omega t)$
- Snaren:
  - Golfvergelijking (uitwijking  $\psi$ ):  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$
  - Energie per lengte-eenheid:  $u_T(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2$ ,  $u_V(x, t) = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2$
  - Vermogen:  $P = -F \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$
  - Impedantie:  $Z = \sqrt{\mu F}$
- Gassen (lucht):
  - Golfvergelijking (uitwijking  $\psi$ ):  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  ( $\gamma = 7/5$  voor ideaal tweeatomig gas)
  - Energie per volume-eenheid:  $u_T(x, t) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2$ ,  $u_V(x, t) = \frac{1}{2} \gamma p_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2$
  - Vermogen per eenheid oppervlak (intensiteit):  $I = -\gamma p_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$
  - Impedantie per eenheid oppervlak:  $Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho}$
- Reizend van medium 1 naar 2:  $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ ,  $t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ ,  $R = r^2$ ,  $T = \frac{Z_2}{Z_1} t^2$

## Physics of Light and Optics Chapter 1

- $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$  ( $\vec{A}$  een willekeurige vector-grootheid)
- $\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$
- $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$
- $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ( $\rho$  ladingsdichtheid)
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- $\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  (3D golfvergelijking in vacuüm)
- $\vec{J} = \vec{J}_{free} + \vec{J}_m + \vec{J}_p$
- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{omvat}}{\epsilon_0}$
- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{omvat} + \int \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

### Physics of Light and Optics Chapter 2

- Diëlektrica:  $\vec{J}_p = \frac{d\vec{P}}{dt}$ , met  $\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}$
- $\mathcal{N} = n(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$
- Fasesnelheid  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$ .
- Dipooloscillator:  $\chi(\omega) = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)$  ( $N$  dipooldichtheid,  $m_e$  massa elektron,  $\omega_0$  resonantiefrequentie oscillator)
- $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$
- $I = \langle \vec{S} \rangle_t \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  normaalvector van oppervlak,  $\langle \dots \rangle_t$  tijdsgemiddelde)  $= \frac{1}{2} n\epsilon_0 c |\vec{E}_0|^2 e^{-2\kappa k(\vec{a} \cdot \vec{r})} (\vec{a} \cdot \vec{n})$

### Physics of Light and Optics Chapter 3

- $\theta_r = \theta_i$  (reflectie)
- $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$  (Snellius)
- $r_s = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$
- $r_p = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$
- $t_s = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$
- $t_p = \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$
- $R_s = |r_s|^2$ ,  $R_p = |r_p|^2$ ,  $T_s = \left( \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i} \right) |t_s|^2$ ,  $T_p = \left( \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i} \right) |t_p|^2$

### Physics of Light and Optics Chapter 6

- $\vec{E}_0 \rightarrow E_{eff} \vec{j}$ , Jones-vector  $\vec{j} = \begin{bmatrix} A \\ B e^{i\delta} \end{bmatrix}$ , lineair horizontaal  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , circulair rechtsdraaiend  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ , circulair linksdraaiend  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
- Polarisatie-beïnvloedend element algemeen:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix}$
- Polarisatiefilter met doorlaatrichting horizontaal:  $\xi = 0$ , kwart-lambda-plaatje met snelle as horizontaal  $\xi = e^{i\pi/2}$ , half-lambda-plaatje  $\xi = e^{i\pi}$ .
- Reflectie aan een oppervlak:  $\begin{bmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix}$ ; transmissie  $\begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix}$  (vergeet voor intensiteit factor  $\frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i}$  niet)
- Polarisatie-beïnvloedend element  $J$  geroteerd over willekeurige rotatiehoek  $\theta$  t.o.v. horizontale as:  
 $J_\theta = R_\theta J R_\theta^{-1}$ , met  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  en  $R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  rotatiematrices

### Physics of Light and Optics Chapter 7 & 8

- $I = \frac{n\epsilon_0 c}{2} (\vec{E}_{tot} \cdot \vec{E}_{tot}^*)$ ,  $\vec{E}_{tot} = \sum_i \vec{E}_{0,i}$  (superpositie van vlakke golven  $\vec{E}_{0,i} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ )
- $I(\Delta\phi) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \Delta\phi$

### Physics of Light and Optics Chapter 10 & 11

- intensiteit in Fraunhoferlimiet voor invallende vlakke golf met amplitude  $E_0$ :  
 $I(x, y) = \frac{1}{2} n\epsilon_0 c E_0^2 \left| \frac{1}{\lambda^2 z^2} \int_{x'} \int_{y'} f(x', y') e^{-i\frac{kx}{z} x'} e^{-i\frac{ky}{z} y'} dx' dy' \right|^2$
- Intensiteitspatroon enkele spleet ( $y = 0$ ):  
 $I(x) = I_0 \left( \frac{\sin \chi}{\chi} \right)^2$  ( $\chi = \frac{\pi \Delta x}{\lambda z} x$ ,  $I_0$  maximale intensiteit in waarnemingsvlak)
- Wanneer een positieve lens met brandpuntsafstand  $f$  wordt gebruikt, zijn de uitdrukkingen hierboven geldig in het brandvlak van de lens met  $z \rightarrow f$ .