Beoordelingscriteria tentamen G&O, 5 juli 2006

Opgave 1

▪ a. 5 pt

```
y1 = f[x - v t];
D[y1, {t, 2}] == v^2 D[y1, {x, 2}]
```

```
True
```

```
y2 = g[x + v t];
D[y2, {t, 2}] == v^2 D[y2, {x, 2}]
```

```
True
```

Gewoon invullen in de golfvergelijking. Je moet dus weten dat de partiële afgeleide van f naar x gelijk is aan f ', maar dat de partiële afgeleide van f naar t gelijk is aan f ' maal de afgeleide van (x-v t) naar t, en die laatste is -v.
Het teken voor de v (in x±vt) is onbelangrijk, omdat je door tweemaal te diffrentiëren altijd een + krijgt.Daarom kan een golf in één dimensie altijd 2 kanten oplopen.

▪ b. 5pt

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Dit moet gewoon worden opgeschreven en niet iets anders!

▪ c. 5 pt

g[x-v t] loopt in de positieve x-richting, en f[x+v t]in de negatieve x-richting.
Beschouw punten met een bepaalde fase, bijv het punt dat op t=0 de waarde g[0] heeft, dat is n.l het punt x=0. De "fase" g[0] wordt op t=1 bereikt in het punt waarvoor x-v*1 = 0, en dat is het punt met x-coördinaat v. Aannemende dat v>0 lopen punten met gelijkblijvende fase met snelheid v in de positieve x-richting.
Zo'n lang zwetsverhaal is nu ook weer niet nodig. Beoordeel zelf of de formulering het volledige aantal punten waard is.

▪ d. 5 pt

Wet van Newton `F=m a`. toegepast op een stukje snaar met lengte `dx`. De massa `m` van dat stukje snaar is gelijk aan μ `dx`. Dus de kracht per lengte eenheid $F_y = \mu a$. De versnelling a is de tweede afgeleide naar de tijd van de uitwijking `g[x-v t]`, dus

```
Fy = μ D[g[x - v t], {t, 2}]
```

$v^2 \mu g''[-t v + x]$

Ofwel:

$$F_y = \mu D[g[x - v t], \{t, 2\}] = \mu v^2 g''[x - v t] = F * g''[x - v t]$$

Als een student het antwoord $\mu v^2 g''[x - v t]$ geeft is de dimensie berekening als volgt

```
(kg / m ) * (m / s)^2 *  m / m^2
```

$\frac{kg}{s^2}$

en dat is natuurlijk hetzelfde als N/m: "kracht per lengteeenheid".

Geeft de student als antwoord $F g''[x - v t]$, dat is eigenlijk de bedoeling, dan is F natuurlijk al in N en is het belangrijk te beseffen dat g[x] een functiewaarde is met een dimensie! Het argument van de functie heeft dimensie meter [m], en de functiewaarde heeft dezelfde dimensie. Differentieer je zo'n functie 1 keer dan heb je iets dat dimensieloos is: **m/m**, maar differentieer je dat ding 2 keer, dan heb je dimensie **m/m^2 = m^-1.**

Het voorkomen van partiële afgeleides van g in het antwoord moet fout worden gerekend. De functie g heeft maar één argument. Je kunt de functie dus alleen maar differentiëren; doe je dat twee keer, dan heb je een g", die je berekent in het punt **x-v t**.

N.B. De begrippen dimensie en eenheid worden hier niet netjes gebruikt.

■ e. 5 pt

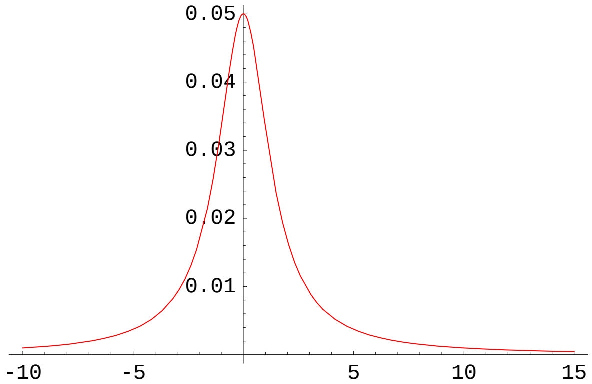
Opmerking: eigenlijjk had er in de tekst boven vraag e) moeten staan $y_R(x, t = 0) =$ ...., in plaats van $y_R(x, t) =$. ....

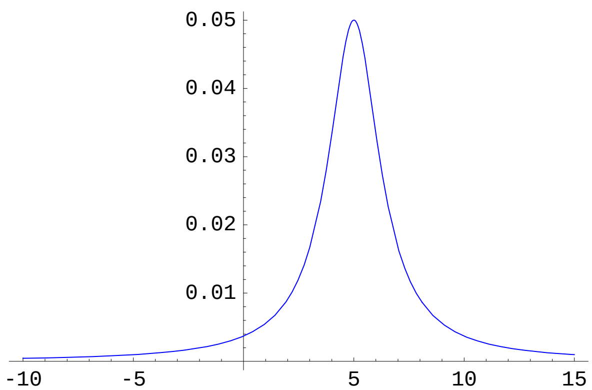
F=10 N,
μ =100 g = 0.1 kg
Dus v = 10 m/s

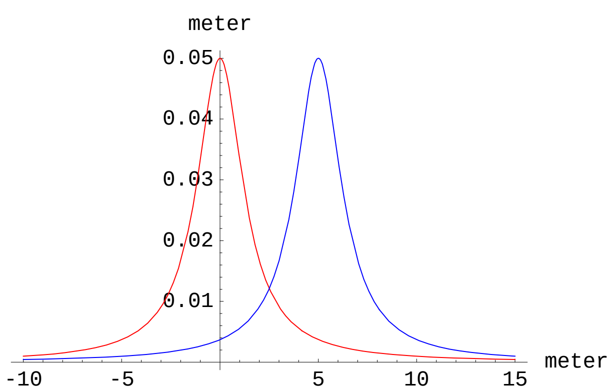
Opmerking: Als v verkeerd is berekend dan kunnen vraag e+f+g maximaal nog 5 punten opleveren, als die verkeerde waarde op consistente wijze is gebruikt!

Kenmerken van de tekening moeten zijn: **Piekwaarde op x=0 is 0.05**. De halve hoogte is nog over bij x= ± Sqrt[2], dus pieken met ongeveer **breedte van 3 meter**. Die piek schuift in 0.5 sec met **5 meter naar rechts. Beide pieken moeten even hoog en gelijkvormig zijn.**
Het bereik van de x-as moet minstens liggen van -5 tot +10. Plots van bijv. x=0 tot x=5 krijgen veel aftrek!

```
fig1 = Plot[0.1 / (2 + (x - v t)^2) /. {v → 10, t → 0}, {x, -10, 15}, PlotStyle → Red];
fig2 = Plot[0.1 / (2 + (x - v t)^2) /. {v → 10, t → .5}, {x, -10, 15}, PlotStyle → Blue];
Show[fig1, fig2, AxesLabel → {"meter", "meter"}];
```







f. 5pt

$$\frac{0.1}{2 + (x - 10\,t)^2};$$

Als de v symbolisch in het antwoord staat 3 pt.

Veel studenten zullen e) en f), lijkt me, omdraaien. Probeer de kwaliteit van de tekening onafhankelijk te beoordelen, ook al is f) perfect gemaakt!

g. 5pt

Op t=0: $y_L(x,\,0) = -0.1 \big/ \left(2 + x^2\right)$

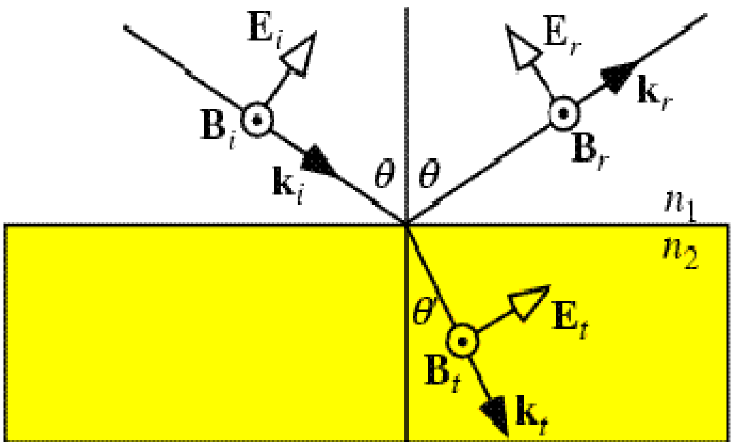
Voor willekeurige tijd;

$$y_L[x, t] = \frac{-0.1}{2 + (x + 10\,t)^2};$$

Als de v hier weer als symbool in het antwoord staat, maar als verder alles perfect is: 4 pt.

Opgave 2

a) 5pt



Het beoogde plaatje ziet er ongeveer als volgt uit. Het grensvlak tussen medium 1 en medium 2 is loodrecht op de tekening. De E-vectoren, de polarisatierichting, liggen in het vlak van tekening en zijn loodrecht op de k-vectoren. De orientatie tussen de k-vector en de E-vector moet overal hetzelfde zijn!! θ_t moet kleiner zijn dan θ_i die natuurlijk gelijk is aan θ_r. De B-vectoren hoeven in de tekening niet voor te komen (die zijn loodrecht op het vlak van tekening).

b) 5pt

Gebruik Snellius

$$n_1 \,\mathrm{Sin}[\theta_i] = n_2 \,\mathrm{Sin}[\theta_t]$$

en dat voor de Brewsterhoek de genoemde reflectiecoëfficiënt gelijk is aan 0, dus dat de teller van die uitdrukking 0 is,

$$n_2 \,\mathrm{Cos}[\theta_i] = n_1 \,\mathrm{Cos}[\theta_t]$$

Gebruik de hint, vermenigvuldig beide identieiten met elkaar en je krijgt

$$n_1\, n_2 \,\mathrm{Sin}[\theta_i]\,\mathrm{Cos}[\theta_i] = n_1\, n_2 \,\mathrm{Sin}[\theta_t]\,\mathrm{Cos}[\theta_t]$$

ofwel

$$\mathrm{Sin}[\theta_i]\,\mathrm{Cos}[\theta_i] = \mathrm{Sin}[\theta_t]\,\mathrm{Cos}[\theta_t]$$
$$\mathrm{Sin}[2\,\theta_i] = \mathrm{Sin}[2\,\theta_t]$$

Er volgt nu dat, omdat zowel θ_i als θ_t kleiner of gelijk aan $\pi/2$ zijn en groter dan 0 en omdat ze ook niet aan elkaar gelijk zijn, $2\,\theta_i = \pi - 2\,\theta_t$. Dus $\theta_i + \theta_t = \pi/2$.

c) 5 pt

Als θ_i gelijk is aan de Brewsterhoek θ_P geldt

Sin[θ_t] = Sin[$\pi/2 - \theta_i$] = Cos[θ_i]. Invullen in Snellius geeft

$$n_1 \text{Sin}[\theta_i] = n_2 \text{Cos}[\theta_i]$$

Ofwel

$$\text{Tan}[\theta_i] = n_2 / n_1.$$

De hoek van inval waarbij deze relatie geldt is de Brwesterhoek θ_P. Er geldt dus $\text{Tan}[\theta_p] = n_2 / n_1$.

d) 5 pt

Bij loodrechte invallen zijn alle hoeken gelijk aan 0. De bedoelde reflectiecoëfficiënt is dan $(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)$ en die is groter dan 0, omdat $n_2 > n_1$. Dat er toch een fasesprong van π optreedt ligt aan het feit de k-vector van richting omdraait. De E-vector blijft dezelfde orientatie tov de k-vector houden. In het plaatje bij vraag a) betekent dit dat de eerst naar rechts wijzende E-vector, na reflectie naar links zal wijzen. Dat geeft de fasesprong.

Zo zie je ook dat de **negatieve** reflectiecoëfficiënt als je vanuit medium 2 reflecteert aan het grensvlak met medium 1 juist **geen** fasesprong geeft. Dit werd echter niet gevraagd.

e) 5 pt

Een Brewster hoek bestaat natuurlijk ook op als je van medium 2 invalt op medium 1. Uit symmetrie overwegingen volgt uit c) dat $\text{Tan}[\theta_{p'}] = n_1 / n_2$. Er volgt dan direct dat $\theta_P + \theta_{P'} = \pi/2$, want de twee theta's zijn de scherpe hoeken van 1 rechthoekige driehoek met rechthoekszijden n_1 en n_2.

Alternatief: De gepolariseerde lichtstraal die onder een hoek θ_P invalt wordt volledig doorgelaten (en daarbij gebroken) . Zo zal ook de straal die in omgekeerde richting loopt volledig worden doorgelaten (en dus evenmin reflecteren aan het grensvlak van medium 2 en medium 1. Met andere woorden $\theta_{P'}$ is gelijk aan brekingshoek θ_t van een straal die uit medium 1 met hoek θ_P invalt. Hiervoor hadden we in b) al laten zien dat die 2 hoeken samen 90 graden zijn.

De omkeerredenering moet wel goed in elkaar steken voordat je er het volledige aantal punten aan toekent!

Opgave 3

a) 5 pt

$$I_n = I_0 (\text{Sin}[N \alpha] / \text{Sin}[\alpha])\text{^}2;$$

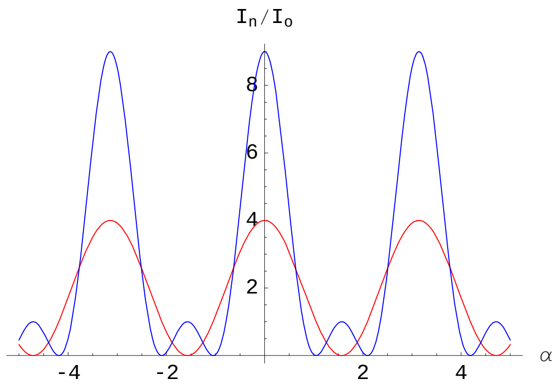
Vul in N=2, en gebruik Sin[2α] = 2 Sin[α] Cos[α] en er volgt direct

$$I_2 = 4 I_0 \text{Cos}[\alpha]^2$$

met natuurlijk nog steeds α= k d Sin[θ]/2

b) 6 pt

```
Plot[{(Sin[2 α] / Sin[α])^2, (Sin[3 α] / Sin[α])^2},
  {α, -5, 5}, AxesLabel → {"α", "In/Io"}, PlotStyle → {Red, Blue}];
```



Aandachtspunten voor beoordeling:
1. Centrale piek bij 0.
2. Hoofdmaxima allemaal gelijke intensiteit.
3. Hoofdmaxima bij N=2 en N=3 op zelfde plaats
4. Hoofdmaxima bij N=2 heeft waarde 4 en bij N=3 de waarde 9.
5. Secundaire maxima bij N=3 hebben intensiteit 1 en liggen halverwege de hoofdmaxima.
6. Langs de x-as staat α=k d Sin[θ]/2 uitgezet, π d Sin[θ] / λ, dus eerste hoofdmaximum bij Sin[θ]=λ/d.

■ c) 6 pt

```
Limit[(Sin[N α] / Sin[α])^2, α -> 0]
```

N^2

Voor kleine waarde van x is Sin[x] gelijk aan de reeks x-x^3/6+..., dus de laagste orde term is x. Sin[Nα] kan dus worden benaderd door Nα., en Sin[Nα]/Sin[α] door N.

■ d) 6 punt

Dit is niet in tegenspraak met de wet van hehoud van energie De intensiteit van elke hoofdmaximum neemt kwadrtatisch toe met met aantal spleten, en niet linear. Maar de breedte van elk hoofdmaximum neemt **AF**. (Dit kun je misschien niet zo duidelijk zien aan de tekening bij vraag b). Als je over een volledig hoofdmaximum integreert neemt de "energie" lineair toe met het aantal spleten. Dat is de bedoelde "wet van behoud van energie", want elke spleet levert een even grote bijdrage aan de intensiteit van (het gebiedje rond) elk hoofdmaximum.

```
1 / π Integrate [(Sin[2 α] / Sin[α])^2, {α, -π / 2, π / 2}]
1 / π Integrate [(Sin[3 α] / Sin[α])^2, {α, -π / 2, π / 2}]
```

2

3

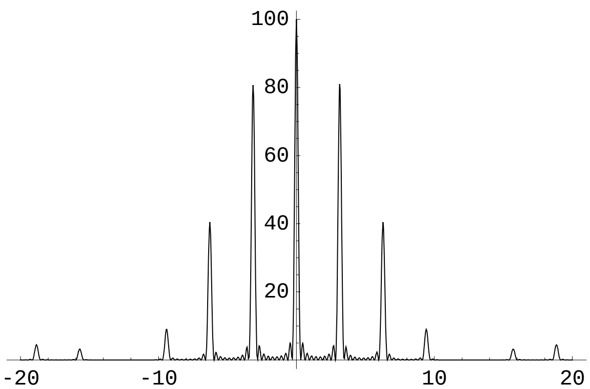
e) 5 pt

$$I = I_0 \left(\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2} N\, k\, d\, \mathrm{Sin}[\theta]\right] \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2} k\, a\, \mathrm{Sin}[\theta]\right]}{\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2} k\, d\, \mathrm{Sin}[\theta]\right] \left(\frac{1}{2} k\, a\, \mathrm{Sin}[\theta]\right)} \right)^2$$

Als iemand α=k d Sin[θ]/2 eerste netjes definieert en β=k a Sin[θ]/2, en vervolgens de juiste uitdrukking geeft in N, α en β is dat ook goed. Let op de I_0 die mag niet in het kwadraat!

f) 6 pt

```
Plot[(Sin[n α θ] / Sin[α θ] Sin[β θ] / (β θ))^2 /. {n → 10, α → 1, β → 0.25},
  {θ, -20, 20}, PlotRange → All];
```



Het vierde orde hoofdmaximum is verdwenen. In het midden zit de nulde orde, zie de tekst van vraag b ivm het tellen. De vraagstelling is duidelijk.
De tekening moet aan de volgende eisen voldoen.
1. Symmetrisch
2. Hoogste piek in het midden.
3. Afnemende intensiteit van de nulde naar de 4e orde,
4. Derde orde al klein getekend (maximaal 1/4 van de hoogte van de nulde orde).
5. Kleine wiggles tussen de hoofdmaxima als indicatie voor secundaire maxima. Over de hoogte kun je weinig zeggen omdat N niet is gegeven, maar de secundaire maxima moeten "klein" zijn..
6. Een 5e orde hoofdmaximum, met intensiteit die kleiner is dan die van de 3e orde.

g) 6 pt

Antwoord: $d / a = 4 / m_2$, met m2 = 1, 2 of 3.

4 punten voor het antwoord d/a=4, mits natuurlijk de uitleg kcorrect is. De volle 6 punten alleen als iemand de andere mogelijkheden ook heeft gezien!

Hoofdmaxima in het N-spleten intensiteitspatroon treden op als

$$\frac{1}{2} k\, d\, \mathrm{Sin}[\theta] = m_1 \pi$$

m_1 is de orde van het hoofdmaximum.

Het vierde orde hoofdmaximum heeft een diffractiehoek die voldoet aan

$$\mathrm{Sin}[\theta] = \frac{4\pi}{\frac{k\,d}{2}}$$

Bij die hoek is de teller van de gegeven N-spleet intensiteit weliswaar 0 maar de noemer is dat ook; en het quotient heeft de limietwaarde $I_0 N^2$.

Het diffractiepatroon van een spleet met breedte a heeft minima als

$$\frac{1}{2} k\, a\, \mathrm{Sin}[\theta] = m_2 \pi$$

Dus

$$\mathrm{Sin}[\theta] = \frac{m_2 \pi}{\frac{k\,a}{2}}$$

met $m_2 = 1, 2, 3,$ .... Dus als het vierde orde hoofdmaximum samenvalt met een minimum van het diffractiepatroon van 1 spleet met eindige breedte moet gelden

$$d / a = 4 / m_2$$

Omdat a<d is het correcte antwoord dus: **d/a = 4 / m_2 met m_2 gelijk aan 1, 2, of 3**.
d/a=4, correspondeert met het in f) getekende plaatje
d/a =2, laat ook al het 2e orde hoofdmaximum wegvallen
d/a=4/3, geeft het volgende patroon.

```
Plot[(Sin[n α θ] / Sin[α θ] Sin[β θ] / (β θ))^2 /. {n → 10, α → 1, β → 0.75},
  {θ, -20, 20}, PlotRange → {0, 5}];
```