

Tentamen Golven/Optica

Dinsdag 29 april

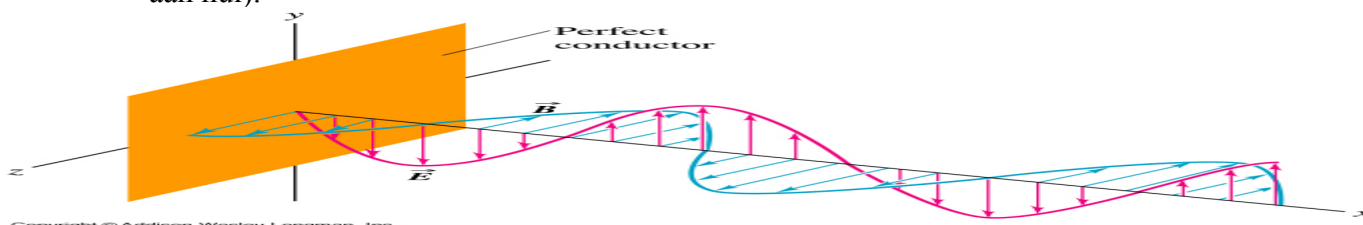
Aanvang: 14 uur

Duur: 3 uur

1. Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, op het eerste vel bovendien uw adres en studierichting.
2. Verdeel uw tijd goed over de diverse onderdelen van de drie opgaven. Bij iedere opgave is het aantal punten vermeld

Opgave 1. Lopende golven, staande golven, stralingsdruk (30 punten)

Een vlakke monochromatische e.m. golf in vacuüm loopt langs de negatieve x-as (golfgetal k , hoekfrequentie ω , amplitude E_{max} en B_{max}) en wordt gereflecteerd aan een ideale geleider in het y-z vlak (randconditie: totale E veld in het y-z vlak is gelijk aan nul).



- a. Geef de uitdrukkingen voor het E en B veld als functie van plaats en tijd voor de invallende en voor de gereflecteerde lopende golven. Controleer dat het totale E veld in het y-z vlak een knoop heeft en het totale B veld een buik.
- b. Geef de uitdrukkingen voor de Poynting vector S en de energiedichtheid U ($= S/c$) van de invallende en van de gereflecteerde golven.
- c. Geef de uitdrukking voor de superpositie van de inkomende en gereflecteerde golven. Laat zien dat dit een staande golf is en dat het E -veld en het B -veld 90° in fase verschillen. Geldt dit laatste ook voor de lopende golven?
- d. Geef een uitdrukking voor de Poynting vector S en de energiedichtheid U van de staande golf.
- e. Laat zien dat de Poynting vector gemiddeld over één periode, S_{av} , gelijk aan nul is voor deze staande golf.
- f. Geef een uitdrukking voor de energiedichtheid bij het y-z vlak van deze staande golf gemiddeld over één periode, U_{av} , en geef een uitdrukking voor de stralingsdruk op de ideale geleider.

Opgave 2. Reflectie en transmissie aan een grensvlak, polarisatie (35 punten)

We beschouwen een vlak grensvlak tussen twee niet-absorberende materialen met brekingsindices n_i en n_t , ($n_i < n_t$). We laten een vlakke elektromagnetische golf met golfvector k_i door het materiaal met index n_i op dit grensvlak invallen. De hoek tussen k_i en de normaal op het grensvlak noemen we θ_i . Een deel van de golf wordt aan het grensvlak gereflecteerd als een vlakke golf met golfvector k_r , een deel wordt doorgelaten in het materiaal met index n_t (onder een hoek θ_t met de normaal) als een vlakke golf met golfvector k_t .

We onderscheiden twee lineaire polarisatierichtingen: de parallelle richting (p), waarbij de polarisatie parallel is aan het vlak dat wordt opgespannen door k_i en k_r , en

de loodrechte richting s (van het Duitse ‘senkrecht’), loodrecht op dit vlak. De amplitudes van de golven geven we aan als E_{0i}^s , E_{0r}^s , E_{0t}^s , E_{0i}^p , etc.

- (a) Schets de situatie. Geef hierin duidelijk de golfvectoren, de hoeken θ_i , θ_r , en θ_t (de hoek van reflectie), en de amplitudes voor beide polarisatierichtingen aan.

De component van \mathbf{k} parallel aan het grensvlak noemen we $k_{//}$

- (b) Laat zien dat $k_{i//} = k_{r//}$ en dat $k_{i//} = k_{t//}$.
 (c) Het golfgetal k wordt gedefinieerd als de absolute waarde van \mathbf{k} : $k = |\mathbf{k}|$. Geef een uitdrukking voor k_t/k_i in termen van n_i en n_t .

Met behulp van de Maxwell vergelijkingen kunnen we nu de *amplitude* transmissie- (t) en reflectiecoëfficiënten (r) definiëren:

$$r_s \equiv \left(\frac{E_{0r}^s}{E_{0i}^s} \right) = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$t_s \equiv \left(\frac{E_{0t}^s}{E_{0i}^s} \right) = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$r_p \equiv \left(\frac{E_{0r}^p}{E_{0i}^p} \right) = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$t_p \equiv \left(\frac{E_{0t}^p}{E_{0i}^p} \right) = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

Wanneer $n_t > n_i$ geldt, dat $r_s < 0$.

- (d) Laat dit zien. Leg in woorden uit wat de fysische betekenis is van de uitdrukking $r_s < 0$.
 (e) Laat zien dat r_p ook geschreven kan worden als

$$r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}.$$

- (f) Leid uit de uitdrukking bij (e) een uitdrukking af voor de Brewsterhoek θ_p (zie Summary). Is de Brewsterhoek ook gedefinieerd bij reflectie aan een grensvlak naar een optisch *dunner* medium?
 (g) Laat zien dat in het algemeen geldt, dat $r + t \neq 1$. Is hier sprake van een tegenspraak met de wet van behoud van energie? Motiveer je antwoord.

In de limiet $\theta_i \rightarrow 0$ geldt $r_s = -r_p$. Bij $\theta_i = 0$ (loodrechte inval) verdwijnt het verschil tussen s en p polarisaties. Ogenscheinlijk lijkt de uitdrukking $r_s = -r_p$ dus op een tegenspraak.

- (h) Leg uit dat hiervan toch geen sprake is.

We definiëren nu de reflectie- (R) en transmissiecoëfficiënt (T) voor de *intensiteit* als $R = I_r/I_i$ en $T = I_t/I_i$.

- (i) Laat zien, dat $R + T = 1$. (Je mag je hier beperken tot het geval $\theta_i = 0$, maar bij andere hoeken geldt dit ook!)

Opgave 3. **Spectraal- en angulair scheidend vermogen van een tralie (35 punten)**

We beschouwen N identieke smalle spleten evenwijdig aan de z -as op onderlinge afstand d in een scherm door de oorsprong en loodrecht op de x -as. In de richting van de positieve x -as valt een vlakke monochromatische lichtgolf in met golfgetal k , hoekfrequentie ω en amplitude E_i . We analyseren het diffractiepatroon dat ontstaat ná verstrooiing van de vlakke golf door de spleten, op een tweede scherm loodrecht op de x -as, ver weg geplaatst van het eerste scherm, op afstand R .

- Teken de situatie in het x - y vlak.
- Geef de coördinaten van de \mathbf{k} vector van de invallende golf.
- Waarom hebben de \mathbf{k} vectoren van de verstrooide golven ná het eerste scherm de algemene gedaante $(k_x, k_y, 0)$?

Het elektrische veld op punten P met coördinaten $(R, Rk_y/k, z)$ op het tweede scherm wordt gegeven door: $E(P) = E_u \sin(\frac{1}{2}k_y Nd) / \sin(\frac{1}{2}k_y d)$.

- Druk de hoek die de stralen die P bereiken, maken met het x - z -vlak uit in k en k_y .
- Geef de intensiteit van het licht voor de punten P met coördinaten $(R, 0, z)$. Laat zien dat dit de maximale intensiteit is op het scherm.
- Geef de coördinaten van de punten P waar deze maximale intensiteit eveneens wordt gehaald?
- Geef de coördinaten van de punten P waar de intensiteit exact gelijk aan nul is.
- Schets het diffractiepatroon voor $N = 2$ en voor $N = 10$.
- Leg uit wat er gebeurt met het diffractiepatroon als we *twee* vlakke golven met *verschillende* golfgetallen laten invallen langs de x -as? Een berekening wordt niet verlangd.
- Leg uit wat er gebeurt met het diffractiepatroon als we *twee* vlakke golven met *gelijke* golfgetallen laten invallen maar met *verschillende*, maar *kleine* hoeken in het x - y vlak met de x -as (φ en $-\varphi$). Een berekening wordt niet verlangd.
- Geef een uitdrukking en leg deze uit voor zowel het *spectraal scheidend vermogen* $\Delta\lambda/\lambda$ van het tralie als het *angulair scheidend vermogen* $\Delta\varphi$ van het tralie in termen van N .