NS-102B: Golven en Optica
Toets 2, dinsdag 29 april 2003
Uitwerking

Opgave 1

a. Invallende golf loopt in de –x richting en de gereflecteerde golf loopt in de +x richting.

Invallende golf:

$$E_i(x,t) = -E_{max}\sin(\omega t + kx)$$

$$B_i(x,t) = B_{\max}\sin(\omega t + kx)$$

Gereflecteerde golf:

$$E_r(x,t) = E_{\max}\sin(\omega t - kx)$$

$$B_r(x,t) = B_{\max}\sin(\omega t - kx)$$

De resulterende (staande) golf is:

$$E_s(x,t) = E_{\max}\left(-\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)\right)$$

$$B_s(x,t) = B_{\max}\left(\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)\right)$$

Voor $x = 0$ wordt dit:

$$E_s(0,t) = 0$$

$$B_s(0,t) = 2B_{\max}\sin(\omega t)$$

Dus heeft het totale E-veld in het y-z-vlak een knoop en het totale B-veld een buik.

b. De energiedichtheid is:

$$u = \varepsilon_0 E^2$$

Voor de heengaande golf wordt dit:

$$u_i = \varepsilon_0 E_{\max}^2 \sin^2(\omega t + kx)$$

en voor de gereflecteerde golf:

$$u_r = \varepsilon_0 E_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

De (grootte van de) Poynting vector voor de heengaande en gereflecteerde golf:

$$S_i(x,t) = \frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\sin^2(\omega t + kx) = \varepsilon_0 c E_{\max}^2 \sin^2(\omega t + kx)$$

$$S_r(x,t) = \frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\sin^2(\omega t - kx) = \varepsilon_0 c E_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

c. $E_s(x,t)$ en $B_s(x,t)$ uit opgave a. kunnen ook geschreven worden als:

$$E_t(x,t) = -2E_{\max}\cos(\omega t)\sin(kx)$$

$$B_t(x,t,) = 2B_{\max}\sin(\omega t)\cos(kx)$$

Dit zijn beide staande golven: op ieder tijdstip is $E_t = 0$ voor $kx = n.\pi$ en $B_t = 0$ voor $kx = (n+ ½)\pi$ (knopen). Op een bepaald tijdstip heeft E_t een sinusvorm en B_t een cosinusvorm. Beide golven hebben dus een faseverschil van 90°.

d. De energiedichtheid van de staande golf is de som van beide energiedichtheden uit opgave b:

$$u_s = \varepsilon_0 E_{\max}^2\left(\sin^2(\omega t + kx) + \sin^2(\omega t - kx)\right)$$

$$= \varepsilon_0 E_{\max}^2\left(\sin^2(\omega t)\cos^2(kx) + \cos^2(\omega t)\sin^2(kx)\right)$$

De som van de Poynting vectoren uit opgave b. is (ze zijn tegengesteld gericht):

$$\begin{aligned}\left|S_s(x,t)\right| &= \frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\left(\sin^2(\omega t-kx)-\sin^2(\omega t+kx)\right)\\ &= 4\frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin(kx)\cos(kx)\\ &= \frac{E_{\max}B_{\max}}{\mu_0}\sin(2\omega t)\sin(2kx)\end{aligned}$$

e. Het gemiddelde van $\sin(2\omega t)$ over één periode is inderdaad nul.

f. Zowel $\sin^2(\omega t)$ als $\cos^2(\omega t)$ zijn gemiddeld over één periode gelijk aan ½. Dus de gemiddelde energiedichtheid is:

$$\begin{aligned}u_{s,gem} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{\max}^2\left(\cos^2(kx)+\sin^2(kx)\right)\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{\max}^2\end{aligned}$$

De intensiteit van de invallende (en van de gereflecteerde) golf is:

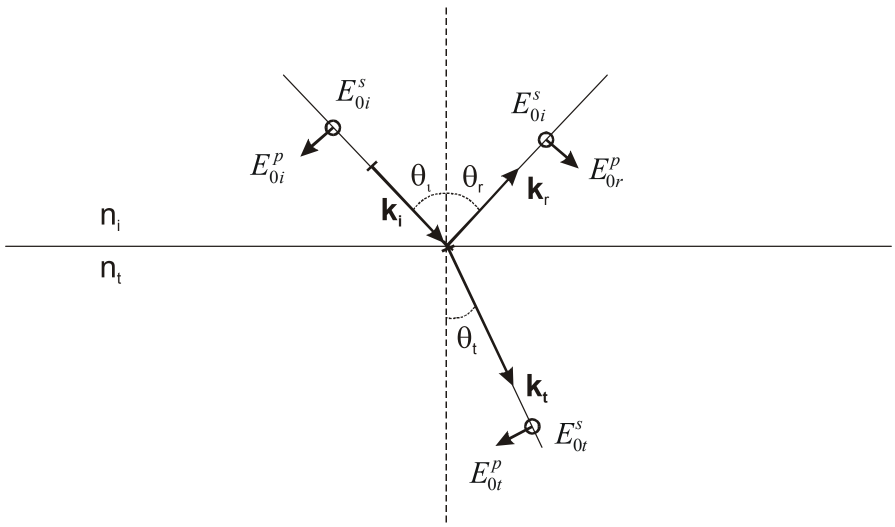
$$I = S_{gem} = \frac{E_{\max}B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{\max}^2$$

De stralingsdruk is:

$$p = \frac{2I}{c} = \varepsilon_0 E_{\max}^2$$

Opgave 2

a.



b. $k_{i//} = k_{r//} = k_r \sin\theta_i$

Verder is $k = \dfrac{\omega}{c}$

Dus: $\dfrac{k_t}{k_r} = \dfrac{k_t}{k_i} = \dfrac{c_t}{c_i} = \dfrac{n_i}{n_t}$

En: $\dfrac{k_{t//}}{k_{r//}} = \dfrac{k_t \sin\theta_t}{k_r \sin\theta_i} = \dfrac{n_t}{n_i}\dfrac{n_i}{n_t} = 1$

c. Zie b.

d. $$r_s = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} = \frac{\frac{n_i}{n_t}\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} - 1}{\frac{n_i}{n_t}\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} + 1} = \frac{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} - 1}{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} + 1} = \frac{\frac{\tan\theta_t}{\tan\theta_i} - 1}{\frac{\tan\theta_t}{\tan\theta_i} + 1}$$

De teller is negatief omdat $\theta_t < \theta_i$, dus $r_s < 0$.

Dit betekent een fasesprong van π rad.

e. $$\frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i} = \frac{\sin\theta_i \cos\theta_i - \sin\theta_t \cos\theta_t}{\sin\theta_t \cos\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_i}$$

Ook :

$$\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i - \theta_t)} \frac{\cos(\theta_i + \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$
$$= \frac{\left(\sin\theta_i \cos\theta_i - \cos\theta_i \sin\theta_t\right)\left(\cos\theta_i \cos\theta_t - \sin\theta_i \sin\theta_t\right)}{\left(\cos\theta_i \cos\theta_t + \sin\theta_i \sin\theta_t\right)\left(\sin\theta_i \cos\theta_t + \cos\theta_i \sin\theta_t\right)}$$
$$= \frac{\sin\theta_i \cos\theta_i - \sin\theta_t \cos\theta_t}{\sin\theta_t \cos\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_i}$$

q.e.d.

f. Voor de Brewsterhoek θ_p is $r_p = 0$, dus $\tan(\theta_p - \theta_t) = 0$

Dus:

$$\theta_t = 90^o - \theta_p$$
$$\frac{\sin\theta_p}{\sin\theta_t} = \frac{n_t}{n_i}$$
$$n_i \sin\theta_p = n_t \sin(90^o - \theta_p) = n_t \cos\theta_p$$
$$\tan\theta_p = \frac{n_t}{n_i}$$

g. Voor r_s en t_s :

$$r_s + t_s = \frac{n_i \cos\theta_i + 2n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$
$$= \frac{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta + 2n_i \cos\theta_i - 2n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t}$$
$$= 1 + 2\frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta}$$
$$\neq 1$$

De transmissie- en reflectiecoefficiënten hebben betrekking op de *amplitudes* van de E-velden, dus er is geen tegenspraak met de wet van behoud van energie.

h. Omdat de parallelle en loodrechte richting niet meer gedefinieerd zijn voor loodrechte inval is ook de definitie van r_s en r_p niet meer zinvol.

i. De intensiteit is (zie opgave 1f):

$$I = \frac{E_{\max}^2}{2\mu v}$$

Bij goede benadering geldt:

$\mu_i = \mu_t$ zodat

$$I \sim \frac{E_{\max}^2}{v}$$

De snelheid in medium i is c/n_i en die in medium t is c/n_t

Dus voor r_s en t_s:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r_s^2$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_t}{n_i} t_s^2$$

Voor de duidelijkheid definieren we :

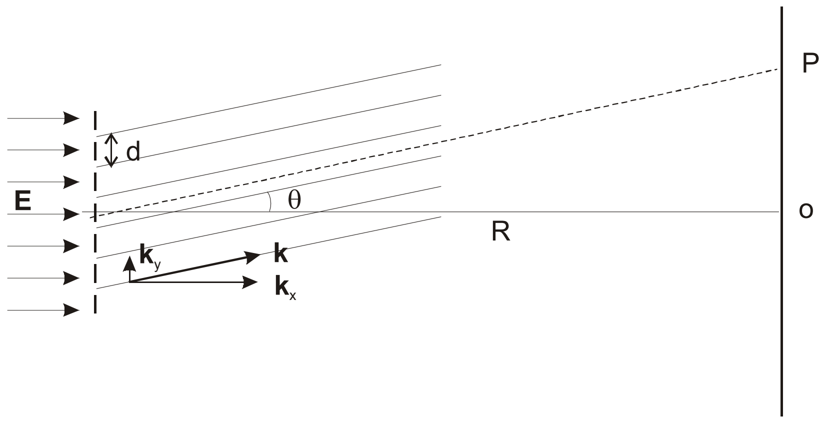
$$\frac{n_i}{n_t} = p$$

Voor $\theta_i = 0$ vinden we:

$$R + T = \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^2 + \frac{1}{p}\left(\frac{2p}{p+1}\right)^2$$
$$= 1$$

Opgave 3

a.



b. De lichtgolf heeft de richting van de positieve x-as, dus:

$$\vec{k} = (k_x, 0, 0)$$

c. De invallende lichtgolf wordt alleen in horizontale richting (evenwijdig aan het xy-vlak) verstrooid door de verticale spleten. Vandaar dat de z-component van de *k*-vector na verstrooiing nul is.

d. Voor die hoek θ geldt:

$$k_y = k \sin\theta$$

$$\theta = \arcsin \frac{k_y}{k}$$

Voor de volgende onderdelen gebruiken we de formule:

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_u \frac{\sin\left(1/2k_y Nd\right)}{\sin\left(1/2k_y d\right)}$$

e. Voor P = (R,0,z) zijn zowel teller als noemer nul. Met l'Hopital vinden we:

$$\mathbf{E}(R,0,z) = N \cdot \mathbf{E}_u$$

Alle golven uit de N spleten komen in fase bij P = (R,0,z) aan. De intensiteit is hier dus maximaal.

f. Dat zijn de punten waarvoor zowel de teller als de noemer nul worden, dus:

$$\left.\begin{array}{l} 1/2k_y d = n\cdot\pi \\ k_y = \dfrac{2n\pi}{d} \end{array}\right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Dit levert de volgende uitdrukking voor de punten P waarin een maximum wordt waargenomen:

$$P = (R, n\frac{R\lambda}{d}, z)$$

g. Dit zijn de punten waarvoor de teller nul is, maar de noemer niet:

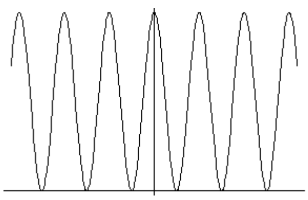
$$\left.\begin{array}{l} 1/2k_y Nd = n^*\cdot\pi \\ k_y = \dfrac{2n^*\pi}{Nd} \end{array}\right\} \quad n^* = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad \text{maar niet } n^* = Nn$$

Dit zijn dus de punten

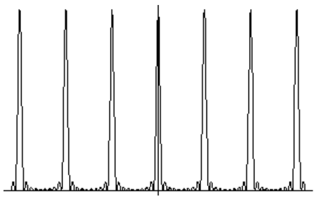
$$P = (R, n^*\frac{R\lambda}{Nd}, z)$$

h. (De intensiteit is evenredig met het kwadraat van de veldsterkte!)

Voor N=2:



Voor N=10:



i. Een andere *k* betekent dat in het diffractiepatroon zoals getekend in opgave h. de maxima verder (voor kleinere *k*) of minder ver (voor grotere *k*) uit elkaar liggen.

j. De golven die de N spleten bereiken zijn nu niet meer in fase, maar hebben kleine faseverschillen. Dit betekent dat het intensiteitspatroon zoals dat in h. getekend is in zijn geheel naar links of naar rechts verschuift.

k. We weten:

$$k_y = k\sin\theta = 2\pi\sin\theta/\lambda$$

Dus

$$\mathrm{d}\,k_y = \frac{2\pi\cos\theta}{\lambda}\,\mathrm{d}\theta$$

Deze afstand moet gelijk zijn aan die tussen een maximum en het eerste minimum:

$$\frac{2\pi\cos\theta}{\lambda}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{Nd}$$

dus:

$$d\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \lambda / N$$

Spectraal scheidend vermogen:

Twee golven uit aangrenzende spleten in de richting θ interfereren constructief als

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Dus:

$$d\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = m\,\mathrm{d}\lambda$$

Hieruit volgt:

$$R = \lambda / \mathrm{d}\lambda = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Angulair scheidend vermogen

Uit:

$$d\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = m\,\mathrm{d}\lambda$$

volgt meteen

$$R_{ang} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

Voor kleine hoek θ en gebruik makend van $R = \lambda / \mathrm{d}\lambda = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ kan men ook schrijven:

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{Nd}$$