Julius Instituut
Universiteit Utrecht

Opgave 1: Lopende golven en interferentie op een snaar (40 punten)

a) $y(x,t)$ invullen in golfvergelijking $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Resultaat: $k = \frac{\omega}{v}$.

b) Fase $(\omega t - kx)$ is constant in de tijd. Dus $\frac{\partial}{\partial t}(\omega t - kx) = \omega - k\frac{dx}{dt} = 0$ Hieruit volgt $v = \omega/k > 0$, dus golf beweegt naar rechts. Alternatief 1: Bereken fase op (x_1, t_1) en (x_2, t_2) en stel deze aan elkaar gelijk. De snelheid is dan de afgelegde weg gedeeld door de tijd. Alternatief 2: Pas een coördinatentransformatie toe (Galilei).

c) Aangezien $v = \sqrt{F/\mu}$ en $\lambda = v/f$ neemt de golflengte met een factor $\sqrt{2}$ toe.

d) $v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t - kx)$

e) Maximale transversale snelheid: $A\omega$. Fasesnelheid: $v = \omega/k$. Verhouding: Ak.

f) $g(x - vt)$ invullen in golfvergelijking. Kettingregel toepassen, noem $p = x - vt$: $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dg}{dp}$, evenzo $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} = -v\frac{dg}{dp}$. Eindresultaat na twee keer differentiëren: $\frac{d^2 g}{dp^2} = \frac{v^2}{v^2}\frac{d^2 g}{dp^2}$. Idem voor $f(x + vt)$.

g) $g(x - vt)$ loopt in de richting van de positieve x-as. $f(x + vt)$ in de richting van de negatieve as. Voor de reden zie onderdeel b.

h) $y(x,t) = g(x - vt) + f(x + vt)$ is een algemene oplossing omdat de golfvergelijking een lineaire tweedegraads differentiaalvergelijking is. Tweedegraads betekent dat er twee onafhankelijke oplossingen zijn. Lineair betekent dat de oplossingen opgeteld mogen worden.

i) Op het genoemde tijdstip heeft de snaar op geen enkele plaats een uitwijking, dus is de snaar nergens uitgerekt en is er geen potentiële (elastische) energie.

j) Op $t = 0$ geldt $y(x, 0) = 0$, dus $g(x) = -f(x)$. De functies f en g zijn dus op het teken na identiek. Op tijdstip t is g over een afstand

vt naar rechts verschoven en $f = -g$ een afstand vt naar links. Dus op tijdstip t moet gelden $y(x,t) = g(x - vt) - g(x + vt)$ of $y(x,t) = -f(x - vt) + f(x + vt)$.

k) $\frac{\partial y}{\partial t} = vg'(t = 0) + vg'(t = 0) = 2vg'(t = 0)$ ($g' = \frac{dg}{dp}$ met $p = x - vt$).

l) In een golf is de totale energie behouden. Dus als de potentiële energie gelijk is aan nul ($t = 0$) dan zal de kinetische energie maximaal zijn.

Opgave 2: Orgelpijp (30 punten)

a) Gesloten pijp: normaalmodes als $n\frac{1}{2}\lambda = L$, dus $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}$.

b) Voor een halfopen pijp geldt voor de normaalmodes $\frac{1}{4}\lambda + n\frac{1}{2}\lambda = L$ dus $f = \frac{2n+1}{4L}v$. Voor een volledig open pijp is de conditie $\frac{1}{2}\lambda + n\frac{1}{2}\lambda = L$, dus $f = \frac{n+1}{2L}v$. Voor beide geldt dat de afstand tussen de modes gelijk is aan $f_{n+1} - f_n = \frac{v}{2L} = 392$ Hz. De pijp is volledig open als de frequenties een veelvoud zijn van 392. Dit is hier niet het geval. Voor de halfopen pijp moet gelden dat de frequenties gedeeld door 392 gelijk zijn aan $n + \frac{1}{2}$. Dit klopt voor $n = 3$ en $n = 4$.

c) Derde en vierde boventoon.

d) $\frac{v}{2L} = 392$, $L = 43.3$ cm.

Opgave 3: Geluidsgolven en Dopplereffect (30 punten)

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi 10^3$ rad/s, $\lambda = v/f = 0.34$ m, $k = 2\pi/\lambda = 18.5$ m^{-1}.

b) $p = -B\frac{\partial y}{\partial x}$, $p_{max} = BAk = 2.6 \times 10^2$ Pa. Luchtdruk is 10^5 Pa.
$I = \frac{p_{max}^2}{2\rho v}$ en $v = \sqrt{B/\rho}$ dus $I = \frac{p_{max}^2 v}{2B} = 81$ W/m^2.

c) $W = I \times 0.03 = 2.41$ Watt

d) $I = W/(4\pi r^2) = 2.41/(4\pi 100) = 1.92 \times 10^{-3}$ W/m^2. In dB: $10 \log I/10^{-12} = 92.8$ dB.

e) Twee stappen. Frequentie die de "muur" ontvangt is $f_m = \frac{340+10}{340}10^3$ Hz. De microfoon ontvangt $\frac{340}{340-10}f_m = \frac{350}{330}10^3 = 1.06$ Khz.